2006 수학성취도평가시험

(2006학년도 정시 입학생)

2006 년 2월 17일

- 1번부터 6번은 단답형이고, 7번부터 12번은 서술형입니다.
- 단답형은 답만 쓰고, 서술형은 풀이 과정과 답을 간단 명료하게 쓰시오.
- 각 문항의 배점은 단답형 5점, 서술형 7번~10번 10점, 서술형 11번~12번 15점입니다.

문제 1 3차원 공간에서 광원이 원점에 위치하고 스크린이 평면 $3x+2y+z=12$ 으로 주어졌을 때, 점 $P(1,2,3)$ 이 스크린 위에 나타나는 상의 위치는 점(, ,) 이다.

[풀이] 원점과 점 P 를 지나는 직선을 t 로 매개화하면 $x=t,\ y=2t,\ z=3t$ (t는 실수) 이다. 이 직선과 평면 $3x+2y+z=12$ 이 만나는 점은 $3t+4t+3t=12$ 즉, $t=\frac{6}{5}$ 일 때 만나므로 스크린 위에 나타나는 상의 위치는 $(\frac{6}{5},\frac{12}{5},\frac{18}{5})$ 이다.

문제 2 포물선 $y=x^2$ $(x \geqq 1)$ 과 직선 $y=x,\ x=10$ 으로 둘러싸인 영역의 경계 및 내부에 있는 격자점은 모두 $\boxed{}$ 개 이다. (단, 격자점이란 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점을 말한다.)

[풀이] $x=k$ $(1 \leqq k \leqq 10,\ k$ 는 정수) 일 때 y 의 범위는 $k \leqq y \leqq k^2$ 이므로, 이 직선 위에 있는 격자점의 개수는 k^2-k+1 개이다. 따라서 모든 격자점의 개수는 $\sum_{k=1}^{10}(k^2-k+1)=340$ 개이다.

문제 3 함수 f 가 미분가능하고 $\lim_{x\to\infty} f'(x)=3$ 일 때, $\lim_{x\to\infty}[f(x+2)-f(x-2)]=\boxed{}$ 이다.

[풀이] 평균값 정리에 의해 $f(x+2)-f(x-2)=4f'(c)$ 를 만족하는 c (단, $x-2 \leqq c \leqq x+2$) 가 존재한다. $x\to\infty$ 이면 $c\to\infty$ 이므로

$$\lim_{x\to\infty}[f(x+2)-f(x-2)]=\lim_{c\to\infty}4f'(c)=12$$

이다.

문제 4 $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\int_2^{2^{x+1}}\sqrt{1+t^{2006}}\,dt\right]=\boxed{}$ 이다.

[풀이] $f(x) = \int_2^x \sqrt{1+t^{2006}}dt$, $g(x) = 2^{x+1}$ 이라고 하자. 그러면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\int_2^{2^{x+1}}\sqrt{1+t^{2006}}dt\right] &= \lim_{x\to 0}\left[\frac{f(g(x))-f(g(0))}{x-0}\right] \\ &= (f\circ g)'(0) \\ &= f'(g(0))g'(0) = \sqrt{1+2^{2006}}\ 2\ln 2\end{aligned}$$

이다.

문제 5 함수 f 가 $f(0)=1$, $f(1)=2$, $f'(x)>0$, $\int_0^1 f(x)dx = \frac{8}{5}$ 을 만족시킬 때, f 의 역함수를 g 라 하면 $\int_1^2 g(x)dx = \boxed{}$ 이다.

[풀이 1] g 는 f 의 역함수이므로 $g(x)=t$ 로 치환하면 $x=f(t)$ 이고 $dx = f'(t)dt$ 이다. 따라서

$$\int_1^2 g(x)dx = \int_0^1 tf'(t)dt$$

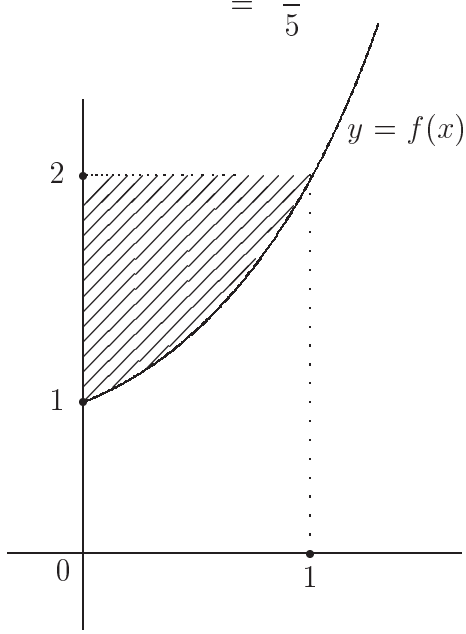
가 되고,

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 g(x)dx &= \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 tf'(t)dt \\ &= \int_0^1 \big(xf(x)\big)'dx = 1f(1) - 0f(0) = 2\end{aligned}$$

가 된다. 그러므로 구하고자 하는 값은 $\frac{2}{5}$ 이다.

[풀이 2] 구하는 적분값은 빗금친 부분의 넓이이므로

$$\begin{aligned}\int_1^2 g(y)dy &= 2 - \int_0^2 f(x)dx \\ &= 2 - \frac{8}{5} \\ &= \frac{2}{5}\end{aligned}$$



문제 6 $p < 1$ 이면 $\lim_{A\to 0^+} \int_A^1 x^{-p}dx = \boxed{}$ 이고, $p > 1$ 이면 $\lim_{B\to\infty} \int_1^B x^{-p}dx = \boxed{}$ 이다.

[풀이] $p < 1$ 인 경우, $\lim_{A\to 0^+} A^{-p+1} = 0$ 이므로

$$\lim_{A\to 0^+} \int_A^1 x^{-p}dx = \lim_{A\to 0^+} \left[\frac{1}{-p+1}(1 - A^{-p+1})\right] = \frac{1}{1-p}$$

이다. 한편, $p > 1$ 인 경우에는, $\lim_{B\to\infty} B^{-p+1} = 0$ 이므로

$$\lim_{B\to\infty} \int_1^B x^{-p}dx = \lim_{B\to\infty} \left[\frac{1}{-p+1}(B^{-p+1} - 1)\right] = \frac{1}{p-1}$$

이다.

문제 7 다음을 만족하는 다항함수 $f(x)$ 를 구하라.

$$x^3 f(x) = 4x^7 + 2x^5 + 3\int_1^x t^2 f(t)\,dt.$$

[풀이 1] 양변을 미분하면

$$3x^2 f(x) + x^3 f'(x) = 28x^6 + 10x^4 + 3x^2 f(x)$$

이고, 이를 정리하면 $x \neq 0$ 일때

$$(*) \qquad f'(x) = 28x^3 + 10x$$

이다. $f(x)$ 가 다항함수이므로, $f'(x)$ 도 다항함수이다. 특별히, $f'(x)$ 는 연속함수이므로, 등식 $(*)$은 $x = 0$ 일 때도 성립한다. 따라서

$$f(x) = 7x^4 + 5x^2 + C$$

이다. $x = 1$ 을 대입하면 $f(1) = 6$ 이므로 $C = -6$ 이고, 이로부터

$$f(x) = 7x^4 + 5x^2 - 6.$$

[풀이 2] $f(x)$ 가 다항식이므로 주어진 식 양변의 차수를 비교하면 $f(x)$ 는 4차식이다. 따라서 $f(x)$ 는 다음과 같이 나타내어진다.

$$f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

주어진 식에 대입하여 계수를 비교하면

$$f(x) = 7x^4 + 5x^2 - 6$$

이다.

[채점기준]

[풀이 1] 1. 미분을 맞게 구하면 3점
2. 적분을 맞게 구하면 6점
3. 답을 정확히 구하면 10점

[풀이 2] 1. 모두 맞게 구하면 10점

2. 계수를 잘못 구하면 0점

[**채점소감**] 학생들이 문제를 잘 읽어보고 차분하게 풀었다면 모두 만점을 받을 수 있는 문제였다. 조금만 더 문제를 잘 알고 풀었다면 학생들이 다항식을 구하는 문제인데도 다항식이 아닌 답을 구하거나 미분을 잘못하는 등의 실수는 없었을 것이다.

문제 8 두 곡선 $y = cx^p$, $y = \ln x$ 가 접하도록 하는 상수 c 를 구하고, 이 때 접점의 좌표 및 두 곡선과 x 축으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하라. (단, $p > 0$)

[**풀이**] 두 곡선 $y = cx^p$, $y = \ln x$ 가 $x = t$ 에서 접한다고 하자. 그러면 그 점에서 좌표가 같고 접선의 기울기가 같으므로 다음 두 방정식

$$ct^p = \ln t, \quad cpt^{p-1} = \frac{1}{t}$$

을 얻을 수 있다. 이 두 식을 연립하여 풀면 $t = e^{\frac{1}{p}}$ 이다. 이 값을 $ct^p = \ln t$ 에 대입하면 $c = \frac{1}{ep}$ 이고, 두 곡선은 $(e^{\frac{1}{p}}, \frac{1}{p})$ 에서 접함을 알 수 있다. 두 곡선과 x 축이 이루는 영역의 넓이 S 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{e^{\frac{1}{p}}} \frac{1}{ep} x^p dx - \int_1^{e^{\frac{1}{p}}} \ln x dx \\ &= \frac{1}{ep(p+1)} [x^{p+1}]_0^{e^{\frac{1}{p}}} - [x \ln x - x]_1^{e^{\frac{1}{p}}} \\ &= \frac{1}{ep(p+1)} e^{\frac{p+1}{p}} - \frac{1}{p} e^{\frac{1}{p}} + e^{\frac{1}{p}} - 1 \\ &= \frac{p}{p+1} e^{\frac{1}{p}} - 1 \end{aligned}$$

[**채점기준**]
1. c 의 값을 정확히 구하면 3점
2. 접점의 좌표까지 정확히 구하면 5점
3. 두 곡선과 x 축이 이루는 영역의 넓이까지 구하면 10점
4. c 의 값이 틀리면 0점

[**채점소감**] 곡선이 접한다는 개념과 두 곡선 사이의 넓이를 구하는 방법은 고등학교에서 많이 다루어지는 부분이기 때문에 대부분의 학생들이 문제를 잘 풀었다. 그러나 어렵지 않은 계산인데도 넓이를 구하는 과정에서 틀린 학생들이 많이 있었다. 개념을 확실히 아는 것은 물론 중요하지만 실수 없이 계산하는 훈련이 필요할 것 같다.

문제 9 $-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ 의 범위에서 곡선 $y = \cos x$ 및 세 직선 $y = c$, $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$ 로 둘러싸인 영역을 직선 $y = c$ 둘레로 회전시켰을 때 생기는 회전체의 부피가 최소가 되도록 상수 c 의 값을 구하라.

[풀이] 주어진 회천체의 부피를 V 라고 하자. 그러면

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - c)^2 dx \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x - 2c\cos x + c^2 dx \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x - 2c\cos x + c^2 dx \\ &= 2\pi \left[(\frac{1}{2} + c^2)x + \frac{1}{4}\sin 2x - 2c\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \pi^2 c^2 - 4\pi c + \frac{\pi^2}{2} \\ &= \pi^2 (c - \frac{2}{\pi})^2 - 4 + \frac{\pi^2}{2} \end{aligned}$$

이다. 따라서 부피 V 는 $c = \frac{2}{\pi}$ 일 때 최소값을 가진다.

[채점기준]

1. 계산과 답이 모두 맞은 경우 10점
2. 부피를 구하는데 답과 관련없는 약간의 실수를 한 경우 8점
3. 풀이 방법은 알고 있으나 계산 실수가 있는 경우 5점

[채점소감] 학생들이 대체적으로 잘 풀었다. 감점을 당한 학생들의 경우 계산 실수보다는 식을 잘못 세우거나 아예 잘못된 접근을 하는 학생들이 많았고, 문제를 정확히 이해하지 못해서 적분 범위를 제대로 구하지 못한 학생들도 많았다.

문제 10

(가) 타원 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 위의 두 점 $P(a,b)$, $A(-2,0)$ 을 잇는 직선과 또 다른 두 점 $Q(a,-b)$, $B(2,0)$ 을 잇는 직선의 교점 T 를 구하라. (단, $-2<a<2$, $a\neq 0$, $b\neq 0$)

(나) 위와 같은 점 P, Q 가 타원 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 위를 움직일때, 점 T 의 자취를 구하라.

[풀이]

(가) $a \neq -2, 2$ 이므로 PA 를 잇는 직선과 QB 를 잇는 직선은 각각 다음

$$y = \frac{b}{a+2}(x+2), \quad y = \frac{-b}{a-2}(x-2)$$

과 같다. 두 식을 연립하여 계산하면 $x = \frac{4}{a}$ 이고, $y = \frac{2b}{a}$ 이다. 따라서 교점 T 는 $(\frac{4}{a}, \frac{2b}{a})$ 이다.

(나) 교점 T 가 $(\frac{4}{a}, \frac{2b}{a})$ 이므로 $\frac{4}{a} = x$, $\frac{2b}{a} = y$ 로 놓고 a, b 에 관하여 정리하면 $a = \frac{4}{x}$, $b = \frac{2y}{x}$ 이다. a 와 b 는 $\frac{a^2}{4} + b^2 = 1$ 을 만족하므로 대입해서 정리하면 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 을 얻는다. 한편, $-2 < a < 2$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ 이므로 $x \neq 2, -2$ 이다. 따라서, 구하는 자취는 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1\,(x \neq 2, -2)$ 이다.

[채점기준]

(가) 1. 교점을 정확히 구한 경우 5점

2. 직선의 방정식은 맞게 구했지만 T 의 좌표를 구하는 계산이 틀린 경우 3점

(나) 1. $x \neq 2, -2$ 라는 조건 또는 이와 동일한 조건을 명시하지 않는 경우는 -2점

2. 사소한 계산 실수 -1점

[채점소감]

(가) 계산 실수를 한 학생들이 의외로 많았고, 특히 쉽게 인수분해되어 약분이 되는데도 끝까지 계산을 하지 않은 답안이 많았다.

(나) 이 문제는 간단한 자취 방정식을 구하는 문제였지만 문제의 의도와는 전혀 다르게 접근한 학생들이 의외로 많았다. 또한 단순히 방정식은 구했지만 주어진 조건에 따라 $x \neq 2, -2$ 라는 조건까지 완벽히 푼 학생은 드물었다.

문제 11 연속함수 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ 에 대하여 다음 물음에 답하라.

(가) 정적분 $\int_a^b f(x)\,dx$ 를 정의하라.

(나) f 의 부정적분을 F 라 할 때, $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ 임을 증명하라.

[풀이]

(가)

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n}$$

(나) 함수 $f(x)$ 가 $[a, b]$ 에서 연속이라고 하자. 그러면 연속함수의 최대최소정리에 의해 구간 $[a, b]$ 의 한 점 x 와 작은 양수 h 에 대하여 다음과 같은 함수를 생각할 수 있다.

$$\begin{aligned} M_x(h) &= \max\{f(t) : t \in [x, x+h]\}, \\ m_x(h) &= \min\{f(t) : t \in [x, x+h]\}. \end{aligned}$$

이제 함수 $S : [a, b] \to \mathbb{R}$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$S(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

그러면,

$$m_x(h)\,h \leqq S(x+h) - S(x) \leqq M_x(h)\,h$$

이고, h 가 양수이므로

$$m_x(h) \leqq \frac{S(x+h) - S(x)}{h} \leqq M_x(h)$$

이다. 한편, 함수 f 가 연속이므로 $\lim_{h\to 0^+} m_x(h) = f(x) = \lim_{h\to 0^+} M_x(h)$ 이다. 따라서 $\lim_{h\to 0^+} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} = f(x)$ 이다.

비슷한 방법으로 h 가 음수일 때도 $\lim_{h\to 0^-} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} = f(x)$ 임을 알 수 있

다. 그러므로 $S'(x) = f(x)$ $(x \in [a,b])$ 이다. 따라서, $S(x) = F(x) + C$ (C는 적분상수) 이고, $S(a) = 0$ 으로부터 $C = -F(a)$ 임을 알 수 있다. 이로부터

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

를 얻는다.

[채점기준]

(가) 정답을 명시한 경우만 5점, 그 이외의 경우는 0점

(나) $S'(x)$ 까지 정확히 보이면 5점, 원하는 식을 보이면 10점

[채점소감]

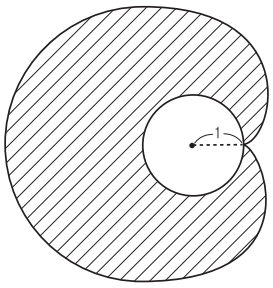
(가) 정적분과 구분구적법과의 관계를 아는 학생들도 정적분의 정의를 완전히 이해하고 있지 못하는 것 같다. 또 구분구적법으로 표현을 시도한 학생들 중 대부분의 학생들은

$$x_k = a + \frac{b-a}{n} \cdot k = a + \Delta x \cdot k, \quad \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

사이의 관계를 이해하지 못하고 x_k 는 위와 같이 쓰고 $\Delta x = \frac{1}{n}$ 이라고 작성한 경우가 많았다. 또한, $x_k = \frac{b-a}{n}$ 또는 $x_k = a + \frac{1}{n} \cdot k$, $\Delta x = \frac{1}{n}$ 등으로 서술한 경우도 많았다.

(나) 상당수의 학생이 단순히 정리 내용만 기억하고 있었고 답안을 논리 정연하게 쓴 학생이 드물어 안타까웠다. 정리 내용을 정확히 기억하는 것도 중요하지만 정리를 증명하는 능력도 길러야 할 것 같다.

문제 12 반지름이 1 인 원의 둘레에 길이가 π 인 실을 감아 한 끝은 고정하고 다른 한 끝에 연필을 달았다. 이 줄을 팽팽하게 당긴채로 연필을 움직여서 자취를 그리면 그림과 같다. 그림에서 빗금친 부분의 넓이를 구하라.



[풀이] 주어진 그림의 대칭축을 x 축, 이 축과 원이 만나는 왼쪽 점에 접하도록 y 축을 잡고 1사분면에서 연필의 자취를 매개화하자. 원의 방정식은 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 이고, 중심의 좌표는 $C(1,0)$ 이므로 원 위의 점 P 는 CP 가 x 축 양의 방향과 이루는 각을 θ 라 할 때 $(1+\cos\theta, \sin\theta)$ 로 표현된다. 한편 P 에서 연필까지의 거리가 θ 이므로 연필의 좌표는 P 를 접선방향, 즉 속도벡터의 반대 방향으로 θ 만큼 평행이동 시킨 점의 좌표와 같다. 따라서 1사분면에서 연필의 자취를 매개화하면 다음과 같다.

$$(x, y) = ((1+\cos\theta) + \theta\sin\theta, \sin\theta - \theta\cos\theta) \ (\text{단}, 0 \leqq \theta \leqq \pi).$$

1사분면에서 빗금친 부분의 넓이와 4사분면에서의 넓이는 같다. 또한 2,3사분면에서는 연필이 중심 $(0,0)$ 이고 반지름 π 인 원을 따라 움직이므로, 구하고자 하는 넓이 S 는

$$S = \frac{\pi^3}{2} + 2(\int_0^\pi xdy - \frac{\pi}{2})$$

이다. 한편, 치환적분법에 의해서

$$\int_0^\pi xdy = \int_0^\pi (1 + \cos\theta + \theta\sin\theta)\theta\sin\theta d\theta = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^3}{6}$$

이다. 그러므로

$$S = \frac{5}{6}\pi^3.$$

[**채점기준**]

1. 연필의 자취를 올바르게 매개화 하면 5점
2. 넓이까지 구하면 15점

[**채점소감**] 벡터를 이용해서 연필의 자취를 매개화 할 수 있다는 것을 많은 학생들이 알지 못했다. 또한, 곡선으로 둘러 싸인 넓이를 구하는 문제는 고등학교에서 많이 다루어지는 내용인데도 넓이를 적분으로 표현하고 이를 직접 계산하는 데 서투른 면이 많았다.