2007 수학성취도 평가시험

(2007학년도 정시 입학생)

2007년 2월 14일

- 1번부터 5번은 단답형이고, 6번부터 11번은 서술형입니다.
- 단답형은 답만 쓰고, 서술형은 풀이 과정과 답을 간단 명료하게 쓰시오.
- 각 문항의 배점은 단답형 6점, 서술형 6번~9번 10점, 서술형 10번~11번 15점입니다.

문제 1 $f(0)=1, f(1)=2, f'(0)=0, f'(1)=3$ 일 때,

$$\int_0^1 [f(x)f'(x)+f'(x)^2 f''(x)]dx = \boxed{}$$

이다.

[풀이]

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left[f(x)f'(x)+f'(x)^2 f''(x)\right] dx &= \int_0^1 \left[\left(\frac{1}{2}f(x)^2\right)' + \left(\frac{1}{3}f'(x)^3\right)'\right] dx \\ &= \left[\frac{1}{2}f(x)^2 + \frac{1}{3}f'(x)^3\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}f(1)^2 + \frac{1}{3}f'(1)^3 - \frac{1}{2}f(0)^2 - \frac{1}{3}f'(0)^3 \\ &= \frac{21}{2}\end{aligned}$$

이다.

문제 2 $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{x}{x-3}\int_3^x \frac{\sin t}{t}dt = \boxed{}$ 이다.

[풀이] $f(x)=\displaystyle\int_3^x \frac{\sin t}{t}\,dt$ 이라고 하자. 그러면

$$\lim_{x\to 3}\frac{x}{x-3}\int_3^x \frac{\sin t}{t}\,dt = 3\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = 3f'(3) = \sin 3$$

이다.

문제 3 $g(0)=0, g'(0)=3$ 인 함수 g에 대하여 함수 f를

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{(e^x-1)g(x)}{2x}, & x\neq 0\\ 0 \quad , & x=0\end{cases}$$

라 할 때, $f'(0)=\boxed{}$ 이다.

[풀이]

$$\begin{aligned}f'(0)&=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)g(x)}{2x^2}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{e^x-1}{x}\cdot\frac{g(x)-g(0)}{x}\\&=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot g'(0)\\&=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

이다.

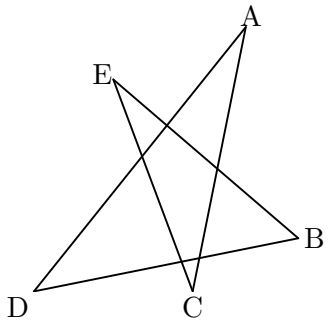
문제 4 $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{m}{n^2}\sum_{k=1}^{n}ke^{-\frac{m}{n}k}=\boxed{}$ 이다.

[풀이]

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{m}{n^2}\sum_{k=1}^{n}ke^{-\frac{m}{n}k}&=\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{mk}{n}e^{-\frac{mk}{n}}\\&=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\int_0^m xe^{-x}\,dx\\&=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\Big\{\big[-xe^{-x}\big]_0^m+\int_0^m e^{-x}\,dx\Big\}\\&=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\Big\{-me^{-m}+\big[-e^{-x}\big]_0^m\Big\}\\&=\lim_{m\to\infty}\Big\{-e^{-m}-\frac{e^{-m}}{m}+\frac{1}{m}\Big\}\\&=0\end{aligned}$$

이다.

문제 5



위의 도형에서 $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CA}+\boxed{}$ 이다.

[풀이] 그림에 의하면

$$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{0}$$

이므로,

$$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{CE}=-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DB}$$

이다.

문제 6 좌표공간의 한 점 $(4,1,6)$에서 평면 $2x+2y-z=0$ 에 내린 수선의 발의 좌표는 $\boxed{}$ 이다.

[풀이] $P=(4,1,6)$이라 하고, 수선의 발을 $X=(a,b,c)$라 하자. $\overrightarrow{PX}$는 평면의 법선벡터 $\overrightarrow{N}=(2,2,-1)$과 평행하므로,

$$\overrightarrow{PX}=(a,b,c)-(4,1,6)=t(2,2,-1)$$

를 만족하는 실수 t가 존재한다. 따라서 X 의 좌표는

$$X=(2t+4,2t+1,-t+6)$$

이다. 그런데, X는 평면에 있는 점이므로, 평면의 방정식에 대입하면

$$2(2t+4)+2(2t+1)-(-t+6)=0$$

이 되어 $t=-\dfrac{4}{9}$임을 알 수 있다. 따라서 $X=\left(\dfrac{28}{9},\dfrac{1}{9},\dfrac{58}{9}\right)$ 이다.

문제 7　실수 전체에서 미분가능한 두 개의 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족한다.

$$\begin{cases} f'(x) = g(x) \\ g'(x) = -f(x) \end{cases}$$

그러면 $f(x)^2 + g(x)^2$ 이 상수임을 보여라.

[풀이] $f(x)^2 + g(x)^2$을 미분하면,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left[f(x)^2 + g(x)^2\right] &= 2f(x)f'(x) + 2g(x)g'(x) \\ &= 2f(x)g(x) - 2g(x)f(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

이므로, $f(x)^2 + g(x)^2$는 상수이다.

[채점기준]

- 증명을 논리적으로 전개하지 못한 경우 0점
- 계산 실수나 기타 설명이 부족한 경우 5점.

[채점소감]

간단한 증명 문제였는데 역을 증명하거나 특정함수를 대입하여 풀이하는 등 의외로 틀린 학생이 많았다. 객관식과 단답형 주관식 위주의 공부에 치중하다 보니 논리적인 이해가 약하여 증명을 잘 못하는 것 같다. 논리적으로 사고하는 훈련을 좀 더 했으면 하는 바램이다.

문제 8　곡면 $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ 위의 점 $(1, 0, 0)$을 지나며 이 곡면에 완전히 포함되는 직선 2개를 찾아라.

[풀이] 직선이 $(1, 0, 0)$ 을 지나므로, 직선의 방정식을

$$\frac{x-1}{a} = \frac{y-0}{b} = \frac{z-0}{c}$$

라 하면, 직선 위의 점은 실수 t에 대하여 $(at+1, bt, ct)$ 가 된다. 또한, 이 직선은 곡면에 완전히 포함되어야 하므로, 임의의 t에 대하여 $(at+1)^2 + (bt)^2 - (ct)^2 = 1$ 이 항상 성립해야 한다. 이 식을 t 에 대해 전개하면

$$(a^2 + b^2 - c^2)t^2 + 2at = 0$$

이므로,

$$a^2 + b^2 - c^2 = 0, \quad 2a = 0$$

이다. 따라서, $a = 0,\ b^2 = c^2$ 이 되고, 두 직선은

$$x = 1, \quad y = z \quad \text{혹은} \quad x = 1, \quad y = -z$$

이다.

[채점기준]

- 직선의 매개화가 맞으면 3점.
- t에 관한 항등식까지 맞게 유도했으면 5점.
- 식의 계산까지 맞으면 7점.
- 답까지 모두 맞으면 10점.
- 풀이 과정이 모두 맞는데 마지막에 $x = 1$을 안쓴 경우 2점 감점.

[채점소감]

응시생의 절반 정도는 이 문제를 풀지 못하였다. 그 중에는 문제풀이를 할 줄 아는 것처럼 보이는데 설명이 미흡하여 득점하지 못한 학생들도 상당수 있었다. 답안을 논리적으로 표현을 하는 데 많은 훈련을 할 필요가 있다고 생각한다.

문제 9 $P_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$ 라 두자. $0 \le x < 1$이라 할 때, 모든 $n \ge 0$ 에 대해

$$P_{2n+2}(x) \le \log(x+1) \le P_{2n+1}(x)$$

임을 보여라.

[풀이] $f(x) = \log(x+1) - P_{2n+2}(x)$ 라고 하자. 그러면

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \sum_{k=1}^{2n+2} (-1)^{k-1} x^{k-1} = \frac{1}{1+x} - \frac{1-(-x)^{2n+2}}{1+x} = \frac{x^{2n+2}}{1+x}$$

이므로, $0 \le x < 1$ 에 대해 $f'(x) \ge 0$ 가 되어 $f(x)$ 는 $0 \le x < 1$ 에서 증가하는 함수임을 알 수 있다. 또한 $f(0) = 0$ 이므로, $0 \le x < 1$ 에서 $f(x) \ge 0$ 이다. 그러므로 $P_{2n+2}(x) \le \log(x+1)$ 이다.

마찬가지로, $g(x) = P_{2n+1} - \log(x+1)$ 라고 하면, $g(0) = 0,\ g'(x) = \dfrac{x^{2n+1}}{1+x} \ge 0$ 이므로 $0 \le x < 1$ 에서 $\log(x+1) \le P_{2n+1}(x)$ 이다.

따라서,

$$P_{2n+2}(x) \le \log(x+1) \le P_{2n+1}(x)$$

이다.

[채점기준]

- $x = 0$일 때에 대한 언급이 없으면 5점 감점.
- 계산실수는 5점 감점.
- log를 상용로그로 생각하고 반례를 보였으면 5점.

[채점소감]

평소 교과서에 나오는 수식에 대한 설명이나 증명을 잘 이해하고 직접 써보는 훈련을 했더라면 이런 증명문제가 그다지 어렵지 않았으리라 생각한다. 수학적 결과 하나하나를 꼼꼼하게 확인해보는 공부 습관을 들였으면 한다.

문제 10 $\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2 \leq (b-a)\int_a^b f(x)^2 dx$ 임을 보여라.

[풀이] 임의의 실수 t에 대해 $(tf(x)+1)^2 \geq 0$ 이므로,

$$\int_a^b (tf(x)+1)^2 dx \geq 0$$

이 된다. 이제 이 식을 t 에 대해 전개하면

$$\left[\int_a^b f(x)^2 dx\right] t^2 + 2\left[\int_a^b f(x)dx\right] t + (b-a) \ \geq 0$$

이 되고, 모든 t에 대해 이 부등식이 성립하려면 판별식 $D/4$ 가 0보다 작거나 같아야 한다. 따라서,

$$D/4 \ = \ \left[\int_a^b f(x)dx\right]^2 - (b-a)\int_a^b f(x)^2 dx \ \leq \ 0$$

가 되어

$$\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2 \leq (b-a)\int_a^b f(x)^2 dx$$

이다.

(별해) 적분의 정의를 이용하여 $\left[\int_a^b f(x)dx\right]^2$ 과 $(b-a)\int_a^b f(x)^2 dx$ 를 다음과 같이 쓸 수

있다.

$$\begin{aligned}\left[\int_a^b f(x)dx\right]^2 &= \left[\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\Big(a+\frac{b-a}{n}k\Big)\right]^2,\\ (b-a)\int_a^b f(x)^2dx &= (b-a)\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\Big(a+\frac{b-a}{n}k\Big)^2.\end{aligned}$$

이제 CBS부등식에 의해,

$$\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\Big(a+\frac{b-a}{n}k\Big)\right]^2 \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\Big(a+\frac{b-a}{n}k\Big)^2 \tag{1}$$

이므로

$$\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2 \le (b-a)\int_a^b f(x)^2dx$$

이다.

[채점기준]

- 별해와 같이 푼 경우, 부등식 (1)이 성립하는 이유를 정확히 언급 안하면 5점.

[채점소감]

기초적인 고교수학의 범위 안에 있는 문제이나, 풀이 방법을 생각하는 과정이 쉽지 않았는지 대부분의 응시자들이 문제 풀이에 접근을 못하고 포기한 경우가 많았다. 또한 부등식이 성립한다는 것은 이해하는 듯 보이나 증명을 하는 데에 어려움을 느끼는 학생도 더러 있는 듯 했다. 조금 더 깊이 생각하는 훈련과 증명을 하는 연습이 필요하다고 하겠다.

문제 11 $0 \le a < b < c \le 1$ 라 할 때, 방정식

$$(\sin x - a)(\sin x - b) + (\sin x - b)(\sin x - c) + (\sin x - c)(\sin x - a) = 0$$

가 구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$에서 두 개의 근을 가짐을 보여라.

[풀이] $t = \sin x$라고 하면 준식은

$$f(t) = (t-a)(t-b) + (t-b)(t-c) + (t-c)(t-a) = 0, \quad 0 \le t \le 1$$

이다. $t = \sin x$ 는 구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 에서 일대일대응 함수이므로 $f(t)$ 가 구간 $[0,1]$ 에서 두 개의 실근을 가짐을 보이면 된다.

$f(t)$ 는 구간 $[0,1]$ 에서 연속이고, $f(a) > 0, f(b) < 0, f(c) > 0$ 이므로 중간값 정리에 의하여 각각의 구간 $(a,b),(b,c)$에서 함수값이 0이 되는 점이 적어도 하나 존재한다. 그런데 $f(t) = 0$ 은 t에 관한 이차방정식이므로 많아야 두개의 실근을 갖는다. 따라서 $f(t) = 0$ 는 2개의 실근을 갖는다.

[채점기준]

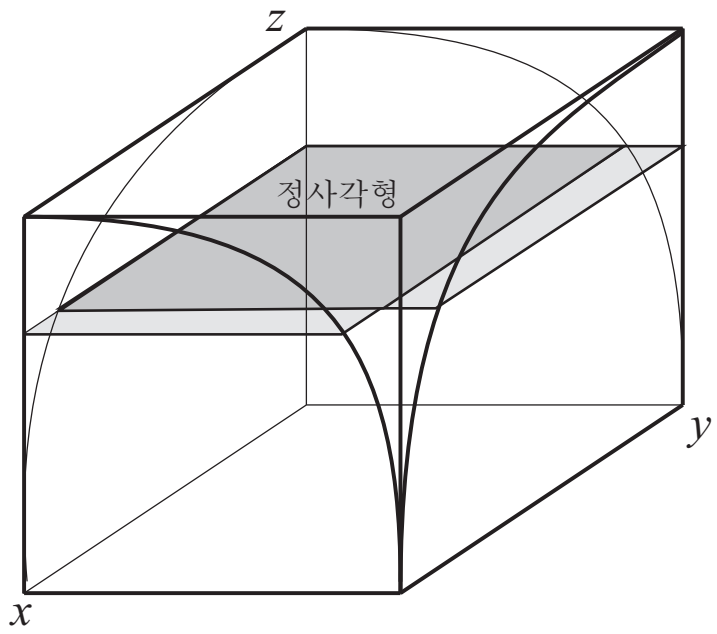
- 중간값 정리를 적용하여 방정식의 해가 적어도 두개라는 것까지 보이면 7점.
- $t = \sin x$가 일대일 대응임을 언급하지 않으면 5점 감점.

[채점소감]

대부분의 학생들이 잘 풀었다. 비교적 낮은 난이도의 문제인데다가 중간값 정리는 고등학교 수학과정에서 중요하게 다루는 부분이기 때문이라고 생각된다. 그러나 풀이에 대한 설명이 부족하거나 증명을 논리적으로 전개하지 못하여 감점을 받은 학생 또한 적지 않았다.

문제 12 좌표공간에서 $x^2 + z^2 \le 1$, $y^2 + z^2 \le 1$ 으로 결정되는 입체도형의 부피를 구하여라.

[풀이] $x, y, z \ge 0$ 인 영역에서 보면 그림과 같이 한변의 길이가 $\sqrt{1-z^2}$이 되는 정사각형을



쌓아놓은 모양이다. 영역 $x, y, z \geq 0$ 에서 z를 고정했을 때의 단면의 넓이를 $s(z)$라 하면, 부피 V 는

$$V = 8\int_0^1 s(z)dz = 8\int_0^1 \left(\sqrt{1-z^2}\right)^2 dz = 8\left[z - \frac{z^3}{3}\right]_0^1 = \frac{16}{3}$$

이다.

[**채점기준**]

- $x^2 + z^2 \leq 1$, $y^2 + z^2 \leq 1$ 로 결정되는 입체도형의 모양을 설명한 것까지 5점.
- 부피를 구하는 식까지 10점.
- 끝까지 맞게 구했으면 15점.

[**채점소감**]

문제에서 말하는 입체 도형의 모양을 구나 회전체 등으로 잘못 생각하는 학생들이 있었는데, 대부분 회전체 등의 익숙한 입체도형의 부피는 잘 구할 것이라 생각된다. 기계적으로 계산하기 보다는 도형의 모양에 대해 먼저 이해하고, 부피를 구하는 식이 왜 이런 적분식으로 표현되는지 충분히 생각해본 후에 계산을 하는 것이 순서이다.