생명과학을 위한 수학1 중간고사 모범답안

문제 1. 단답형. 부분점수 없음.

(a) 0

(b) $-\infty$

(c) $\dfrac{4}{3\pi}$

문제 2. 단답형. 부분점수 없음.
$z = 2x + y - 1$

문제 3. 단답형. 부분점수 없음.

$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

문제 4. 단답형. 부분점수 없음.

$$A = -\frac{\sqrt{3}}{4},\ B = \frac{\sqrt{3}}{2},\ C = \frac{3\sqrt{3}-\pi}{48},\ D = 0,\ E = \frac{\pi - 3\sqrt{3}}{12}$$

문제 5. (15점) 다음 적분을 구하시오.

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin^2 x}\ dx$$

(풀이). 부분적분을 $f(x) = x$, $g'(x) = 1/\sin^2(x)$에 대해서 적용하자.
$1/\sin^2 x$를 도함수로 가지는 함수로 $g(x) = -\cot(x)$를 생각하면, 부분적분법에 따라

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin^2 x}\ dx &= \Big[x\cdot(-\cot x)\Big]_{\pi/3}^{\pi/2} - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} -\cot x\ dx \\ &= \frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x\ dx\end{aligned}$$

으로 적분식을 변경할 수 있다. 적분하려는 함수 $\cot x$는

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{(\sin x)'}{\sin x}$$

으로 나타낼 수 있고, $\sin x$는 $x \in [\pi/3, \pi/2]$에서 양수이므로,

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x\ dx = \Big[\log \sin x\Big]_{\pi/3}^{\pi/2} = \log 1 - \log\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{4}{3}\right)$$

이다. 따라서,

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin^2 x}\ dx = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\log\left(\frac{4}{3}\right).$$

□

[채점 기준] 배점: 15점

1. (**+3점**) 부분적분을 구체적인 함수에 대해 옳바르게 적용한 경우.
2. (**+7점**) 부분적분을 통해 적분하고자 하는 함수를 $\cot x$에 준하는 기초적인 형태로 변경한 경우.
3. (**+5점**) 해당 함수의 정적분 계산을 마무리한 경우.
4. (**-2점**) (중복 감점 X) 계산에 영향을 주는 사소한 실수를 한 경우. 예시) 부호, 삼각함수값 실수
5. (**-2점**) 적분함수를 $\log(\sin x)$로 나타내는 과정에서 $\sin(x)$의 부호를 고려하지 않은 경우.

문제 6. (20점) 다음 이변수함수 $f(x,y)$에 대하여,

$$f(x,y) = 3x^2 - 2xy + y^3$$

그래프 $z = f(x,y)$위의 점 $P(1,1,2)$에서의 접평면과 $Q(0,-1,-1)$에서의 접평면이 이루는 각을 θ라고 둘 때, $cos(\theta)$의 값을 구하시오.

(풀이).
두 평면의 단위 법선벡터를 v, w라고 하자. 그리고 함수 g를 $g(x,y,z) = f(x,y) - z$로 정의하자. 그러면

$$v = \pm\frac{\text{grad } g(P)}{\|\text{grad } g(P)\|}, w = \pm\frac{\text{grad } g(Q)}{\|\text{grad } g(Q)\|}$$

임을 안다. (이 문제에서는 둘 다 + 부호를 단위법선벡터로 택하자.) 여기서 $\text{grad } g = (6x-2y, -2x+3y^2, -1)$ 이므로 $\text{grad } g(P) = (4,1,-1)$, $\text{grad } g(Q) = (2,3,-1)$이다. 따라서 $v = \frac{1}{3\sqrt{2}}(4,1,-1)$, $w = \frac{1}{\sqrt{14}}(2,3,-1)$ 이다.

따라서

$$\cos\theta = v \cdot w = \frac{1}{6\sqrt{7}}(8+3+1) = \frac{2}{\sqrt{7}}$$

임을 얻는다.

채점기준:

1. (**5점**) $\text{grad } f$ 또는 $\text{grad } g$를 계산한 경우.
2. (**5점**) v, w, 또는 접평면을 올바르게 찾은 경우.
3. (**10점**) 답을 올바르게 유도한 경우(반대 부호 또한 정답으로 인정)

□

문제 7. (20점) $x > 0$에 대하여 다음 등식이 성립함을 보시오.

$$2arctan(\sqrt{x}) - arcsin(\frac{x-1}{x+1}) = \frac{\pi}{2}$$

.

(풀이). $x > 0$에 대해 $\arctan\sqrt{x} = t$로 두자. ($t \in (0, \frac{\pi}{2})$이다.)
그러면 $\tan t = \sqrt{x}$이고, $t \in (0, \frac{\pi}{2})$에서 $\cos t > 0$이기 때문에,

$$\cos t = \frac{1}{\sec t} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 t}} = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

임을 알 수 있다. 따라서,

$$\cos\big(2\arctan\sqrt{x}\big) = \cos 2t = 2\cos^2 t - 1 = \frac{2}{1+x} - 1 = \frac{1-x}{1+x} \tag{1}$$

이다. 한편,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{x-1}{x+1}\right) = -\sin\left(\arcsin\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{1-x}{1+x} \tag{2}$$

임을 알 수 있다. 따라서, (1)과 (2)에 의해

$$\cos\big(2\arctan\sqrt{x}\big) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{x-1}{x+1}\right) \tag{3}$$

이다. 한편, $2\arctan\sqrt{x}, \frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{x-1}{x+1} \in (0,\pi)$이고, cos 함수는 $(0,\pi)$에서 일대일이므로, (3)에 의해 $2\arctan\sqrt{x} = \frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{x-1}{x+1}$이다. 따라서 주어진 식이 성립한다. □

[채점기준] 증명과정에서 (1)을 보였다면 +10점, 이를 이용해 (3)을 잘 보였다면 +5점, 증명과정에서 각도의 범위를 잘 따졌다면 +5점, 총 20점 만점으로 채점을 하였습니다.

[참고사항] 별해로, $f(x) = 2\arctan\sqrt{x} - \arcsin\frac{x-1}{x+1} - \frac{\pi}{2}$로 정의한 후 $f'(x) = 0$과 $f(1) = 0$임을 확인하여 $f(x) = 0$임을 도출하는 증명방식이 있었습니다. 이러한 방식으로 문제를 해결한 경우에도 정답처리 하였습니다. 다만, $f(1) = 0$임을 확인하지 않은 경우 5점을 감점하였습니다.

문제 8. (a) (10점) f의 도함수를 구하면 다음과 같다.

$$f'(x) = -e^{1-x} - \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$$

모든 x에 대해 $f'(x) < 0$을 만족하므로 f는 단조감소함수이고 역함수가 존재한다.

(b) (10점) $f(0) = e$, $f(1) = 0.75$를 계산을 통해 확인할 수 있다. 주어진 적분을 $y \to f(x)$ 치환적분을 하면 다음을 얻는다.

$$\int_{0.75}^{e} g(y)\,dy = \int_1^0 xf'(x)\,dx$$

앞에서 구한 $f'(x)$를 이용해 구해야하는 적분을 계산하면

$$\int_0^1 \big(xe^{1-x} + \frac{1}{\pi}\frac{x}{1+x^2}\big)\,dx = \Big[-xe^{1-x}\Big]_0^1 + \int_0^1 e^{1-x}\,dx + \frac{1}{2\pi}\Big[\ln\big(1+x^2\big)\Big]_0^1 = -2 + e + \frac{1}{2\pi}\ln 2$$

[채점 기준] 배점: 20점

1. $f'(x)$ 계산에 4점. 단조감소 혹은 역함수정리 등을 통해 역함수가 존재함을 보이면 6점.
2. 치환적분 혹은 넓이관계 등을 통해 g의 적분을 f의 적분으로 고치는 경우 5점.
   나머지 계산에 5점. 계산에서 단순 실수라고 판단되는 경우 -2점.

문제 9. (20점) $x(t) = e^t\cos t$, $y(t) = e^t\sin t$로 정의되는 매개변수 곡선에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(a) (5점) $0 \le t \le \pi$에서 곡선의 길이를 구하시오.

(b) (5점) $\int e^x \sin x\,dx$, $\int e^x\cos x\,dx$를 구하시오.

(c) (10점) $\frac{\pi}{2} \le t \le \pi$에서 곡선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 영역의 면적을 구하시오.

(풀이).

(a)

- (2점) $x'(t) = e^t(\cos t - \sin t)$, $y'(t) = e^t(\sin t + \cos t)$이므로 ($x'(t)$, $y'(t)$ 각 1점 (부분점수 없음))
- (3점) $a \le t \le b$ 위의 곡선의 길이의 공식 $\displaystyle\int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$ 을 사용하면

$$\int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt = \int_0^\pi \sqrt{2e^{2t}}\, dt = \left[\sqrt{2}e^t\right]_0^\pi = \sqrt{2}(e^\pi - 1)$$

(올바르지 않은 $x'(t)$, $y'(t)$를 사용하였지만 공식이 맞은 경우 3점)

(b)

$$\int e^x \sin x\, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x - (e^x \cos x + \int e^x \sin x\, dx)$$

를 이용하면 $\displaystyle\int e^x \sin x\, dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C$. ($C$는 적분상수) 동일한 방법을 사용하여 $\displaystyle\int e^x \cos x\, dx = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + C$. (원시함수 각각에 대해 1점. 이후 풀이에서 접근 방법이 올바른 경우 3점. 풀이에서 근거 부족 등으로 풀이가 부족하다 판단되는 경우 추가 점수 없음.)

(c) 올바른 공식을 사용한 경우 기본 5점(공식의 조건을 확인하지 않은 경우 2점 감점), 계산 실수가 있는 경우 3점 감점. 이하 예시 기준.

- (5점) 주어진 범위에서 $x(t)$가 순감소 함수이므로 주어진 영역의 넓이는

$$\int_{\pi/2}^{\pi} |y(t)x'(t)|\, dt$$

이다. (순감소에 대한 언급이 없는 경우 2점 감점)

- (5점) $x'(t) < 0$, $y(t) > 0$이고 $x = 2t$로 치환하여 위에서 구한 적분을 계산하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned}\int_{\pi/2}^{\pi} |y(t)x'(t)|\, dt &= -\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1}{2}e^{2t}(\sin 2t - (1 - \cos 2t))\, dt \\ &= \frac{1}{4}\int_{\pi}^{2\pi} e^x(1 - (\sin x + \cos x))\, dx \\ &= \frac{1}{4}\left[e^x - e^x \sin x\right]_\pi^{2\pi} = \frac{1}{4}(e^{2\pi} - e^\pi).\end{aligned}$$

(계산 실수가 있는 경우 3점 감점)

□

문제 10. $f(x, y) = kx^2 + 4xy + (k+3)y^2$에서
$f_x = 2kx + 4y$, $f_y = 4x + 2(k+3)y$ 이므로 원점은 k의 값과 관계없이 항상 임계점이다. (4점)
원점 O 에서의 f의 헤세 행렬은

$$\begin{pmatrix} 2k & 4 \\ 4 & 2(k+3) \end{pmatrix} \tag{4}$$

이다. (4점)
행렬식은 $4k(k+3) - 16 = 4(k+4)(k-1)$ 이므로
$-4 < k < 1$ 일 때 O는 안장점이고
$k > 1$ 일 때 O는 극소점,
$k < -4$ 일 때 O는 극대점이다. (각각 2점)
$k = 1$일 때 $f(x, y) = x^2 + 4xy + 4y^2 = (x + 2y)^2$ 이므로 O가 극소점이고,
$k = -4$일 때 $f(x, y) = -4x^2 + 4xy - y^2 = -(2x - y)^2$ 이므로 O가 극대점이다. (각각 3점)

문제 11. 다음과 같이 함수 f, g를 정의하자.

$$f(x,y,z) = \arctan\left(xy^2z\right)$$

$$g(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$$

각각의 그래디언트를 구해보자.

$$\nabla f = \frac{1}{1+x^2y^4z^2}(y^2z, 2xyz, xy^2)$$

$$\nabla g = (2x, 4y, 6z)$$

이 때 $1+x^2y^4z^2 > 0$이므로, f의 극값 (x,y,z)에서 다음을 만족시키는 실수 λ가 존재한다 (라그랑주 승수법):

$$(y^2z, 2xyz, xy^2) = \lambda(x, 2y, 3z)$$

우선 x, y, z 중 하나라도 0인 경우 나머지 또한 0이 되어 $g(x,y,z) = 4$를 만족시킬 수 없으므로, x, y, z은 모두 0이 될 수 없으며, λ 또한 0이 될 수 없다.

$$xyz = \lambda y \Rightarrow xz = \lambda$$

$$y^2z = \lambda x \Rightarrow y^2xz = \lambda x^2 \Rightarrow y^2 = x^2$$

$$xy^2 = x^3 = 3\lambda z \Rightarrow x^3 = 3xz^2 \Rightarrow x^2 = 3z^2$$

$$\therefore (x^2, y^2, z^2) = \left(k^2, k^2, \frac{1}{3}k^2\right) \quad (k \neq 0)$$

제약 조건 $g(x,y,z) = 4$를 만족해야 하므로,

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = k^2 + 2k^2 + k^2 = 4k^2 = 4 \Rightarrow k = \pm 1$$

가능한 xy^2z의 값은 $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ 뿐이며, $f(x,y,z) = \arctan\left(xy^2z\right)$의 최댓값은 다음과 같다.

$$\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$$

(참고: 실제로 $(x,y,z) = (1, \pm 1, 1/\sqrt{3})$ 또는 $(x,y,z) = (-1, \pm 1, -1/\sqrt{3})$일 때 유효하다.)

[채점 기준] 배점: 20점

1. (**-0점**) 라그랑주 승수법을 올바르게 적용하여 정답을 도출
2. (**-5점**) 라그랑주 승수법을 올바르게 적용하여 관계식 $x^2 = y^2 = 3z^2$ (또는 이와 동치인 관계식)을 얻었으나, 오답을 도출
3. (**-10점**) 라그랑주 승수법이 아닌 다른 올바른 풀이방법을 통해 정답을 도출
4. (**-15점**) 정답은 도출하지 못 했으나, 목적함수 f와 제약조건 g을 잘 정의하고 ∇f와 ∇g를 올바르게 구함
5. (**-20점**) 정답을 도출하지 못 했고, 위의 부분점수 요건에도 충족하지 못 함