

미적분학 2 중간고사
(2019년 10월 19일 오후 1:00-3:00)

학번:	이름:
-----	-----

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 150점)

(연습용 여백)

문제 1. [15점] 좌표평면에서 정의된 함수

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{|x| + |y|}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

에 대하여 다음 물음에 답하시오.

- (a) (7점) f 는 $(0, 0)$ 에서 연속인지 판정하시오.
- (b) (8점) f 는 $(0, 0)$ 에서 미분가능한지 판정하시오.

문제 2. [10점] 다음 명제가 참이면 증명하고, 거짓이면 반례를 드시오.

(명제) 두 연속함수 $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 에 대하여 집합

$$\{X \in \mathbb{R}^n \mid f(X) = 0, g(X) = 0\}$$

은 닫힌 집합이다.

문제 3. [15점] $f(x, y, z) = z^2 + \cosh \sqrt{x^2 + y^2}$ 일 때, 삼차원공간에서 곡면 S 가 방정식 $f(x, y, z) = 3$ 으로 주어져 있다.

공간에서 단위벡터 \mathbf{v} 방향으로 진행하던 빛이 S 에 놓여 있는 점 $P = \left(\log \sqrt{3}, \sqrt{3} \log \sqrt{3}, \frac{2}{\sqrt{3}} \right)$ 에서 S 에 반사되어 단위벡터 \mathbf{v}_* 방향으로 진행하였다. 두 벡터 \mathbf{v} 와 \mathbf{v}_* 가 이루는 각이 120° 일 때,

$$D_{\mathbf{v}_*} f(P) - D_{\mathbf{v}} f(P)$$

의 값을 구하시오. 단, $D_{\mathbf{v}} f(P) < 0$ 을 가정한다.

문제 4. [15점] 함수 $f(x, y) = \frac{1}{x - y - 1}$ 에 대하여 $D_{(a,b)}^4 f(0, 0)$ 을 구하시오.

문제 5. [15점] 함수

$$f(x, y) = (x^2 + y^2) e^{(-x^2 + y^2)/2}$$

의 임계점을 모두 구하고, 각 임계점을 극대점, 극소점, 안장점으로 분류하시오.

학번:	이름:
-----	-----

문제 6. [15점] $a, b, c, r, s, t > 0$ 일 때, 영역

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1, \quad x, y, z \geq 0$$

에서 $x^r y^s z^t$ 의 최댓값을 구하시오.

(연습용 여백)

문제 7. [15점] 함수 $G(x, y) = (xy, x)$ 와 점 $(1, 1)$ 을 $(2, 0)$ 으로 보내는 미분가능한 함수 $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 가 등식

$$(G \circ F)(t, 1) = (t^4 - 1, t^2 + 1), \quad (G \circ F)(1, s) = (-s^4 + 1, s^2 + 1)$$

을 만족할 때, 야코비 행렬 $F'(1, 1)$ 을 구하시오.

문제 8. [15점] 곡선 X 는 반타원 $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, (y \geq 0)$ 을 원점을 중심으로 반시계 방향으로 30° 회전한 곡선이다. 이 곡선의 양 끝점을 모두 구하시오.

곡선 X 를 제1사분면에 있는 끝점에서 출발하여 제3사분면에 있는 끝점에서 도착하도록 매개화하였을 때, 이 곡선을 따른 다음 벡터장의 선적분을 구하시오.

$$\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + y^2)(x, y) + \frac{(-y, x)}{x^2 + y^2}$$

문제 9. [20점] n -공간의 열린 집합 U 에서 정의된 벡터장 \mathbf{F} 에 대하여, 다음 명제가 참이면 증명을 하고, 거짓이면 반례를 보이시오.

- (a) (6점) 벡터장 \mathbf{F} 가 잠재함수를 가지면 임의의 닫힌 일급곡선 X 를 따른 \mathbf{F} 의 선적분은 0이다.
- (b) (7점) 벡터장 \mathbf{F} 가 닫힌 벡터장이면 \mathbf{F} 는 잠재함수를 가진다.
- (c) (7점) 영역 $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ 에서 정의된 벡터장

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

은 잠재함수를 가진다.

문제 10. [15점] 곡선 $X(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t, t), (0 \leq t \leq 2\pi)$ 에 대하여 선적분

$$\int_X yz \, dx - xz \, dy$$

를 구하시오.