2017학년도 수학성취도 측정시험

(2017학년도 수시, 정시모집 합격자 대상)

2017년 2월 14일, 고사시간 90분

- 1번부터 11번까지는 단답형이고, 12번부터 16번까지는 서술형입니다.
- 답안지는 깨끗한 글씨로 바르게 작성하되, 단답형은 답만 쓰고, 서술형은 풀이과정과 답을 명시하시오.
- 총 배점은 100점이고, 각 문항의 배점은, 기본문제(1-6번) 각 3점, 발전문제(7-13번) 각 7점, 심화문제(14번-16번) 각 11점입니다.

2017년 1번 두 다항식 x^3-4x^2+3x, $2x^4-5x^3-3x^2$의 최대공약수는 $\boxed{}$ 이다.

[**풀이**] 두 다항식을 인수분해하면 각각 $x(x-1)(x-3)$, $x^2(x-3)(2x+1)$이므로 최대공약수는 $x(x-3)$이다.

2017년 2번 좌표평면의 두 점 $A(-2,-1)$, $B(3,4)$에 대하여 선분 AB를 $3:2$로 내분하는 점의 좌표는 $\boxed{}$ 이다.

[**풀이**] 내분점 공식에 의해 $\left(\dfrac{2\cdot(-2)+3\cdot 3}{5}, \dfrac{2\cdot(-1)+3\cdot 4}{5}\right)=(1,2)$ 이다.

2017년 3번 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}=\boxed{}$.

[**풀이**] 식이 의미하는 값은 $x=0$에서 함수 $y=\sqrt{x+4}$ 의 미분계수이므로 $\frac{1}{4}$이다.

2017년 4번 함수 $f(x)=\ln(3x-5)$에 대하여 $f'(x)=\boxed{}$ 이다.

[**풀이**] 합성함수의 미분법에 의해 $y=3x-5$로 두면, $\dfrac{d}{dx}\ln y=\dfrac{y'}{y}=\dfrac{3}{3x-5}$이다.

2017년 5번 좌표평면에서 곡선 $y=x^2$과 직선 $x=2$, 그리고 x-축으로 둘러싸인 영역의 넓이는 $\boxed{}$ 이다.

[**풀이**] 주어진 영역의 넓이는 $y=x^2$을 0부터 2까지 정적분한 값과 일치한다. 따라서 답은

$$\int_0^2 x^2\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2=\frac{8}{3}$$

이다.

$\boxed{\text{2017년 6번}}$ 좌표공간의 평면 $2x+3y-z=1$ 에 수직이고 점 $(1,0,1)$ 을 지나는 직선을

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y}{a}=\frac{z-1}{b}$$

로 나타내면, $a+b=\boxed{}$ 이다.

[**풀이**] 평면에 수직인 벡터가 $(2,3,-1)$이고, 직선의 방향벡터는 $(2,a,b)$인데 두 벡터가 나란해야 하므로 $a=3, b=-1$이다. 그러므로 답은 2다.

$\boxed{\text{2017년 7번}}$ 함수 $f(x)$가 $f(0)=0$이고

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)\ln(1-2x^2)}{x^3}=8$$

이면, $f'(0)=\boxed{}$ 이다.

[**풀이**]

$$8=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)\ln(1-2x^2)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{\ln(1-2x^2)}{2x^2}\cdot 2=f'(0)\cdot(-1)\cdot 2$$

이므로 $f'(0)=-4$이다.

$\boxed{\text{2017년 8번}}$ 양의 실수 x에 대하여 정의된 함수

$$f(x)=\int_2^{x^2}\sqrt{t^3+1}\,dt+x^2$$

는 미분가능한 역함수 g를 갖는다. 이때, $g'(2)=\boxed{}$ 이다.

[**풀이**] $y=x^2$이라 하자. 합성함수의 미분에 의해

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_2^{y}\sqrt{t^3+1}\,dt&=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d}{dy}\int_2^{y}\sqrt{t^3+1}\,dt\\&=2x\cdot\sqrt{y^3+1}\\&=2x\cdot\sqrt{x^6+1},\end{aligned}$$

즉, $f'(x)=2x\sqrt{x^6+1}+2x$ 이다. $f(\sqrt{2})=2$이므로 $g'(2)=\dfrac{1}{f'(\sqrt{2})}=\dfrac{1}{8\sqrt{2}}$ 이다.

$\boxed{\text{2017년 9번}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}\frac{2e^{\frac{2}{x}}}{x^2}\,dx=\boxed{}$.

[풀이] 치환적분을 이용한다. $y = \dfrac{1}{x}$로 치환하면, $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{x^2}$이므로,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n}^{n+1}\frac{2e^{\frac{2}{x}}}{x^2}dx &= \lim_{n\to\infty}\int_{1}^{n}\frac{2e^{\frac{2}{x}}}{x^2}dx \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_{1}^{\frac{1}{n}} -2e^{2y}dy \\ &= \lim_{n\to\infty}\left[-e^{2y}\right]_{1}^{\frac{1}{n}} = e^2 - 1\end{aligned}$$

이다.

$\boxed{\text{2017년 10번}}$ $\displaystyle \lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{mn}\frac{n}{k^2}\right) = \boxed{}$.

[풀이] 정적분의 정의를 이용한다. $\dfrac{n}{k^2} = \dfrac{1}{k^2/n^2}\cdot\dfrac{1}{n}$임을 이용하면, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{mn}\frac{n}{k^2} = \int_{1}^{m}\frac{1}{x^2}\,dx$를 얻는다. 따라서

$$\lim_{m\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_{1}^{m} = 1$$

이다.

$\boxed{\text{2017년 11번}}$ 평면에서 거리가 8인 두 점 A, B가 있고, 점 P는 선분 AB와 평행한 또 다른 직선 위를 초속 v로 움직이고 있다(단, v는 $0 < v < 5$인 상수). 점 P가 $\overline{AC} + \overline{BC} = 10$인 점 C에서 출발하여 2초 후 $\overline{AD} + \overline{BD} = 10$인 점 D에 도착하고 $ABDC$가 사각형을 이룬다고 할 때, 사각형 $ABDC$의 넓이를 v에 대한 식으로 나타내면 $\boxed{}$ 이다.

[풀이] 점 A, B를 각각 좌표평면 위 $(-4,0), (4,0)$으로 설정하자. 그러면, $\overline{AX} + \overline{BX} = 10$를 만족하는 점 X의 자취의 방정식은 $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ 이다. 이제, 점 C, D의 y 좌표를 h로 두고, 타원의 방정식을 만족한다는 점을 이용하면 점 C, D의 x 좌표는 각각 $\pm\sqrt{25 - \dfrac{25h^2}{9}}$임을 알 수 있고, 2초만에 점 C에서 점 D로 이동하므로 $2v = 2\sqrt{25 - \dfrac{25h^2}{9}}$를 얻는다. 사각형 $ABDC$의 넓이

$$\frac{1}{2}\left(8 + 2\sqrt{25 - \frac{25h^2}{9}}\right)|h|$$

를 v에 대한 식으로 나타내면 $\dfrac{3}{5}(v+4)\sqrt{25 - v^2}$이다.

$\boxed{\text{2017년 12번}}$ 닫힌구간 $[-1,1]$에서 정의된 연속함수 f가 열린구간 $(-1,1)$에서 미분가능하고, 모든 $x \in (-1,1)$ 에 대하여 부등식

$$|f'(x)| \le 1$$

이 성립할 때, $f(-1) = -1$ 이고 $f(1) = 1$이면 $f(x) = x$임을 보여라.

[**풀이**] 귀류법을 사용하여 어떤 점 $x \in (-1,1)$에 대하여 $f(x) \neq x$라고 가정하자. 그렇다면 $f(x) > x$이거나 $f(x) < x$가 성립한다.

i) $f(x) > x$ 일 때
구간 $(-1,x)$에 대하여 평균값의 정리를 이용하면

$$\frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = f'(c)$$

를 만족하는 $c \in (-1,x)$가 존재하고 $f(x) > x$임을 이용하면

$$f'(c) = \frac{f(x)+1}{x+1} > \frac{x+1}{x+1} = 1$$

이 된다. 이는 주어진 가정에 모순이므로 $f(x) > x$는 성립할 수 없다.

ii) $f(x) < x$ 일 때
구간 $(x,1)$에 대하여 위와 비슷한 풀이를 적용하면 $f(x) < x$는 성립할 수 없다.

결국 두 가지 경우 모두 모순이므로 모든 점 $x \in (-1,1)$에 대하여 $f(x) = x$가 성립한다.

[**다른 풀이**] 함수 $g(x) = f(x) - x$로 두자. 주어진 가정에 의하여 g는 $[-1,1]$에서 연속이고 $(-1,1)$에서 미분가능하며 $-2 \ge g'(x) \ge 0$가 성립한다. 이 때, $g(-1) = g(1) = 0$이고 g가 단조감소함수이므로 모든 $x \in (-1,1)$에 대하여 $g'(x) = 0$일 수 밖에 없다. 따라서 $g(x)$는 상수함수이며 $g(-1) = g(1) = 0$로부터 $g(x) = 0$, 즉 $f(x) = x$를 얻는다.

[**채점 기준**] 평균값의 정리를 이용하여 올바르게 증명을 한 경우에 7점. 평균값의 정리를 사용하지 않았더라도 중간에 논리적 비약이 있지 않고 올바르게 설명한 경우 7점 부여. 중간에 논리 비약이 있거나 설명이 부족한 경우 부분 점수로 3점을 부여

[**채점 소감**] 학생들이 논리적으로 서술해야 하는 부분에서 되겠거니 하고 정당화하지 않거나 두루뭉술하게 서술하는 경우가 많았다. 조금 더 수학적인 논리를 갖추어 명확하게 쓰는 것이 필요하다. 또한 평균값의 정리를 롤의 정리, 사잇값 정리 등 다른 이름으로 서술하는 경우가 더러 있었다. 정확한 정리의 이름을 아는 것도 필요해 보인다.

$\boxed{\text{2017년 13번}}$ 좌표평면에서 곡선 $y = 2\cos x$ 위의 두 점 $(t, 2\cos t)$, $(-t, 2\cos t)$ 에서 이 곡선과 접하는 원의 중심을 $(0, f(t))$라 할 때, 극한값 $\lim_{t\to 0} f(t)$를 구하여라.

[풀이] $y = 2\cos x$는 x에 대한 우함수이므로, 점 $(t, 2\cos t)$와 $(-t, 2\cos t)$에서 이 곡선과 접하는 원의 중심의 x 좌표는 0이다. 한편, $y = 2\cos x$의 $(t, 2\cos t)$에서의 접선의 기울기는 $-2\sin t$이므로 법선의 기울기 m은

$$m = \frac{1}{2\sin t}$$

이다. 따라서, 이 법선의 방정식은

$$y - 2\cos t = \frac{1}{2\sin t}(x-t) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2\sin t}(x-t) + 2\cos t$$

이고, 접하는 원의 중심은

$$(0, f(t)) = \left(0, 2\cos t - \frac{t}{2\sin t}\right)$$

이다. 따라서,

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{t\to 0}\left(2\cos t - \frac{t}{2\sin t}\right) = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

이다.

[채점 기준] $f(t)$와 관련된 식을 바르게 유도한 경우 4점, $f(t)$를 올바르게 적으면 6점, 극한값까지 모두 구하면 7점. 과정이 틀리면 답이 우연히 맞아도 점수를 부여하지 않음. 풀이를 생략했을 경우 점수를 부여하지 않고, 이후 과정에서 맞는 부분에만 점수 부여.

[채점 소감] 문제의 조건을 이용하여 $f(t)$의 값을 구하는 식을 바르게 유도하는 것이 핵심이다. 서로 수직인 두 직선의 기울기의 곱이 -1이라는 사실을 활용하지 못한 학생들이 많았다. 그리고 이를 활용했지만 계산 상의 실수로 틀린 경우도 많았다. 기본적인 이론을 알고 끝까지 집중하여 푸는 것이 필요해 보인다.

$\boxed{\text{2017년 14번}}$ 임의의 양수 a, b에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$(a+b)^{a+b} \le (2a)^a (2b)^b$$

[풀이] 주어진 부등식은 양변에 자연로그 ln을 취한 아래 부등식

$$(a+b)\ln(a+b) \le a\ln 2a + b\ln 2b$$

와 동치이다. $x = 2a, y = 2b$라 하면 이것은 다시

$$\frac{x+y}{2}\ln\frac{x+y}{2} \le \frac{1}{2}(x\ln x + y\ln y)$$

와 동치이다. 이를 보이기 위해, 함수 $f(t) = t\log t$ $(t > 0)$가 아래로 볼록함을 보이면 된다. 이 성질은

$$f''(t) = \frac{1}{t} > 0$$

으로부터 알 수 있다.

[다른 풀이] 주어진 부등식은 양변에 자연로그 ln을 취한 아래 부등식

$$(a+b)\ln(a+b) \le a\ln 2a + b\ln 2b$$

와 동치이다. 여기서 b를 고정된 상수로 두고

$$f(x) = x\ln 2x + b\ln 2b - (x+b)\ln(x+b) \qquad (x>0)$$

로 정의하면, 모든 $x>0$에 대하여 $f(x)\ge 0$임을 보이는 것으로 충분하다. 여기서

$$f'(x) = \ln\frac{2x}{x+b}$$

이므로 $f(x)$는 $x=b$일 때 최솟값 $f(b)=0$을 가진다.

[채점 기준] 바른 증명을 하였을 경우 11점. 틀렸을 경우 점수 없음.

[채점 소감] 틀린 학생들 중 대부분의 학생들이 주어진 부등식을 간단한 꼴로 바꾸지 않고 무모하게 미분하여 식을 전개하려 하였다. 문제를 풀기 전에 어떻게 하면 문제를 좀 더 간단한 식으로 변형하여 생각할 수 있을지 생각하는 과정이 필요할 것 같다. 또한 많은 학생들이 산술-기하 부등식을 반대로 기술하며 증명을 전개하였는데, 올바른 식을 이용하는 것이 아니라 문제를 풀 수 있도록 공식을 적당히 맞추려는 자세는 지양해야 할 것이다.

$\boxed{\text{2017년 15번}}$ 다음 극한값을 구하여라.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{n^2}\frac{1}{k}$$

[풀이] 먼저, 함수 $y=\dfrac{1}{x}$ $(x>0)$ 의 그래프로부터 모든 자연수 n에 대해 부등식

$$\int_1^{n^2}\frac{1}{x}\,dx \le \sum_{k=1}^{n^2}\frac{1}{k} \le \int_1^{n^2}\frac{1}{x}\,dx + 1$$

이 성립한다. 여기서 $\displaystyle\int_1^{n^2}\frac{1}{x}\,dx = \ln n^2 = 2\ln n$ 이므로, 위의 부등식의 양 변을 $\ln n$ (단, $n>1$)으로 나눠주면

$$2 \le \frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{n^2}\frac{1}{k} \le 2 + \frac{1}{\ln n}$$

을 얻는다. 따라서 '샌드위치 정리'에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{n^2}\frac{1}{k} = 2$$

를 얻는다.

[채점 기준] 위의 부등식을 정확히 이끌어내면 6점, 이후 풀이와 답까지 맞으면 11점. 사소한 계산 실수가 있는 경우 2점 감점.

[채점 소감] 많은 학생들이 **[풀이]**과 같은 방법으로 문제를 해결하였다. 하지만 일부 학생들은 구분구적법과 극한을 잘못 활용하여 다음과 같이

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{n^2}\frac{1}{k}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{n^2}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{k}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\int_{\frac{1}{n}}^{n}\frac{1}{x}\,dx=\lim_{n\to\infty}\frac{2\ln n}{\ln n}=2$$

논리적 오류와 비약이 있는 틀린 풀이를 적었다. 정적분, 극한 등의 수학적인 개념에 대해 정확하게 이해한 후 활용하는 습관을 가지는 것이 좋겠다.

$\boxed{\text{2017년 16번}}$ 열린구간 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$에서 정의된 함수 f가 $-\frac{\pi}{2}<x+y<\frac{\pi}{2}$인 임의의 $x,y\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$에 대하여 식

$$\big(1-f(x)f(y)\big)f(x+y)=f(x)+f(y)$$

를 만족할 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) $-\frac{\pi}{2}<x+y<\frac{\pi}{2}$인 임의의 $x,y\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$에 대하여 $f(x)f(y)\neq 1$임을 보여라.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$이면, 임의의 $a\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$에 대하여 다음 식이 성립함을 보여라.

$$\int_{-a}^{a}(f(x))^2\,dx=2f(a)-2a$$

[풀이]

(1) $f(x_0)f(y_0)=1$ 를 만족하는 x_0, y_0가 있다고 가정하자. 그러면 $f(x_0)+f(y_0)=0$으로부터 아래와 같은 모순을 얻는다.

$$1=f(x_0)f(y_0)=f(x_0)(-f(x_0))=-f(x_0)^2\le 0$$

(2) 식에 $x=y=0$을 대입하면 $(1-f(0)^2)f(0+0)=2f(0)$ 이므로 $f(0)=0$을 얻는다. 그리고 $y=-x$를 대입하면 $(1-f(x)f(-x))f(x-x)=f(x)+f(-x)$로부터 $f(-x)=-f(x)$를 얻는다. 이를 이용하면

$$\begin{aligned}f'(x_0)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{(1-f(x_0+h)f(-x_0))f(h)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}(1-f(x_0+h)f(-x_0))\frac{f(h)}{h}\\&=(1-f(x_0)f(-x_0))=1+f(x_0)^2,\end{aligned}$$

즉 $f'=1+f^2$를 얻는다. 따라서

$$\int_{-a}^{a}(f(x))^2dx=\int_{-a}^{a}\Big(f'(x)-1\Big)dx=f(a)-f(-a)-2a=2f(a)-2a$$

이다.

[채점 기준]

(1) 5점 만점이고 논리가 맞으면 5점. 부분점수 없음.
(2) 6점 만점이고 $f(0) = 0$과 $f(-x) = -f(x)$를 구했으면 3점, 끝까지 모두 증명하면 6점.

[채점 소감]

(1) 어려운 문제는 아니지만 증명하는 문제가 익숙치 않아 그런지 절반 정도의 학생만 올바르게 논리 전개를 했다.
(2) 주어진 조건을 이용해서 도함수 f'을 정확히 구한 학생은 어렵지 않게 답을 얻었다. 하지만 적지 않은 학생들이 아무 증명 없이 f를 tan 함수로 두고 풀거나, f의 미분가능을 보이지 않고 주어진 식을 미분 또는 편미분을 하여 논리 전개를 했다. 자명하지 않은 사실들은 항상 증명을 한 후에 이용해야 함을 명심해야 한다.