2019학년도 수학성취도 측정시험

(2019학년도 수시모집, 정시모집 및 글로벌인재특별전형 합격자 대상)
2019년 2월 12일, 고사시간 90분

- 답안지는 깨끗한 글씨로 바르게 작성하되, 단답형은 답만 쓰고, 서술형은 풀이과정과 답을 명시하시오.
- 1번부터 11번까지는 단답형이고, 12번부터 16번까지는 서술형이다.
- 총 배점은 100점이고, 각 문항의 배점은 기본문제(1–6번) 각 3점, 발전문제(7–13번) 각 7점, 심화문제(14번–16번) 각 11점이다.

$\boxed{\text{2019년 1번}}$ $\left(\sqrt[3]{3}\right)^{\ln 8} = 3^A$ 이 성립하는 A는 $\boxed{}$ 이다.

[**풀이**] 답: $\ln 2$

$$\left(\sqrt[3]{3}\right)^{\ln 8} = \left(3^{1/3}\right)^{\ln 2^3} = \left(3^{1/3}\right)^{3\ln 2} = 3^{\ln 2}$$

따라서

$$A = \ln 2$$

[**채점 기준**] $\dfrac{\ln 8}{3}$ 도 정답으로 인정함.

[**채점 소감**] 지수 단원에서 나오는 유리수 지수의 정의와, $(a^r)^s = a^{rs}$, 로그 단원에서 나오는 $\log_a M^k = k\log_a M$ 을 알고 있으면 어렵지 않게 풀 수 있다.

$\boxed{\text{2019년 2번}}$ $\cos 75^\circ = \dfrac{\sqrt{A}-\sqrt{B}}{4}$ 일 때, $A+B = \boxed{}$ 이다.
(단, A, B는 자연수)

[**풀이**] 답: 8

$$\begin{aligned}\cos 75^\circ &= \cos(30^\circ + 45^\circ) = \cos 30^\circ \cos 45^\circ - \sin 30^\circ \sin 45^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

따라서

$$A = 6, B = 2, \qquad A + B = 8$$

[**채점 기준**] 답을 8이라고 맞게 쓴 경우만 정답 처리함.

[**채점 소감**] 삼각함수 단원의 코사인함수 덧셈정리 $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$를 알면 쉽게 풀 수 있는 기본 예제다. 삼각함수의 함숫값을 알지 못하는 각을 잘 알고 있는 특수각의 합으로 쪼개어 나타내는 것이 핵심 아이디어다.

$\boxed{\text{2019년 3번}}$ $\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-2}{x-3}=3$ 인 미분가능한 함수 $f(x)$ 에 대하여, $f(3)+f'(3)=\boxed{}$ 이다.

[**풀이**] 답: 5
분모의 극한값이 0 이므로, 분자의 극한값도 0 이어야 한다.

$$\lim_{x\to 3} f(x)-2=0, \quad \therefore \lim_{x\to 3} f(x)=2$$

$f(x)$ 는 미분가능한 함수이므로 연속함수이고, 따라서 3 에서의 극한값과 함숫값이 같다.

$$f(3)=\lim_{x\to 3} f(x)=2$$

한편, 미분계수의 정의에 의해

$$f'(3)=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-2}{x-3}=3$$

따라서,

$$f(3)+f'(3)=2+3=5$$

[**채점 기준**] 답을 5 라고 맞게 쓴 경우만 정답 처리함.

[**채점 소감**] 함수의 극한과 연속, 미분계수 단원의 기본 개념들을 알고 있으면 풀 수 있는 문제다. 분수식의 극한값이 존재할 때 분모의 극한값이 0 이면 분자의 극한값도 0 이 되는 것, 미분가능한 함수가 연속함수인 것, 연속함수의 정의, 미분계수의 정의를 알고 있어야 한다.

$\boxed{\text{2019년 4번}}$ 구간 $-3\le x\le 5$ 에서 정의된 함수 $f(x)=x^3-12x$ 의 최댓값과 최솟값의 합은 $\boxed{}$ 이다.

[**풀이**] 답: 49
닫힌 구간에서 정의된 함수의 최댓값, 최솟값은 구간의 양 끝점의 함숫값과 구간 내의 극값 중 가장 큰 값과 가장 작은 값이다. 따라서 양 끝점의 함숫값과 극값을 조사하고 비교해보면 최댓값, 최솟값을 구할 수 있다. 먼저 양 끝점의 함숫값은

$$f(-3)=-1, f(5)=65$$

다음으로 극값이 될 가능성이 있는 곳에서 도함수의 함숫값이 0 이므로

$$f'(x)=3x^3-12=3(x-2)(x+2)$$

따라서 $2,-2$ 에서 $f'(x)$ 이 0 이 되고, 여기서 함숫값을 조사해보면

$$f(-2)=16, f(2)=-16$$

네 값중 가장 큰 값은 65, 가장 작은 값은 -16 이므로,

$$(\text{최댓값})+(\text{최솟값})=65+(-19)=49$$

[**채점 기준**] 답을 49 라고 맞게 쓴 경우만 정답 처리함.

[**채점 소감**] 닫힌 구간에서 함수의 최댓값과 최솟값을 구하는 문제로, 도함수의 활용 쪽 함수의 그래프 단원에 나오는 기본 문제다.

$\boxed{\text{2019년 5번}}$ $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \boxed{}$ 이다.

[풀이] 답: 2

$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int_1^4 x^{-\frac{1}{2}}dx = \left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_1^4 = 4-2 = 2$$

[채점 기준] 답을 2라고 맞게 쓴 경우만 정답처리 하였습니다.

[채점 소감] r 이 유리수일 때 x^r 의 도함수가 rx^{r-1} 이 됨을 알고 있으면 풀 수 있는 간단한 정적분 문제다.

$\boxed{\text{2019년 6번}}$ 두 벡터 $\vec{a} = (2,1)$ 과 $\vec{b} = (1,3)$ 가 이루는 각의 크기는 $\boxed{}$ 이다.

[풀이] 답: $\dfrac{\pi}{4}$ 또는 $45°$
두 벡터가 이루는 각의 크기를 θ 라고 했을 때,

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{2\cdot 1 + 1\cdot 3}{\sqrt{2^2+1^2}\sqrt{1^2+3^2}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

이다. 따라서

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

[채점 기준] 교과과정의 정의에 의하면 엄격하게는 두 벡터 사이의 각도는 0부터 π 사이의 값으로 제한하고 있으나, $\dfrac{\pi}{4} + 2n\pi$ 라고 쓴 경우도 정답 처리함.

[채점 소감] 평면벡터의 내적 단원에 나오는 기초 개념인 두 평면벡터 사이의 각도를 구하는 방법을 알고 있으면 쉽게 풀 수 있다.

$\boxed{\text{2019년 7번}}$ 곡선 $y^2 = 2x^3 + 3x + 3$ 과 직선 $y = 3x+1$ 은 세 점에서 만난다. 세 교점의 x 좌표를 x_1, x_2, x_3 라 할 때, $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} x_i = \boxed{}$ 이고, $\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{x_i} = \boxed{}$ 이다.

[풀이] 답: $\dfrac{9}{2}$, $\dfrac{3}{2}$
$y^2 = 2x^3+3x+3$ 과 $y = 3x+1$ 이 세 점에서 만날 때, 교점의 좌표는 두 식을 연립해서 풀었을 때 나오는 해로 이루어져 있다. 두 식을 연립하면

$$y^2 = 2x^3+3x+3 = (3x+1)^2$$
$$\therefore 2x^3 - 9x - 3x + 2 = 0$$

이 삼차방정식의 해가 x_1, x_2, x_3 이므로, 근과 계수와의 관계에 의해

$$x_1+x_2+x_3 = \frac{9}{2}, \quad x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3 = -\frac{3}{2}, \quad x_1x_2x_3 = -1$$

그런데 $1/x_1 + 1/x_2 + 1/x_3$ 을 통분하여 계산하면

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3} = \frac{x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3}{x_1x_2x_3} = \frac{-3/2}{-1} = \frac{3}{2}$$

따라서 답은 $\frac{9}{2}$ 와 $\frac{3}{2}$ 이다.

[**채점 기준**] 답은 9/2 (또는 4.5), 3/2 (또는 1.5) 라고 맞게 쓴 경우만 정답 처리함. 각 답에 대해 3점, 4점씩 부분점수 부여.

[**채점 소감**] x_1,x_2,x_3 에 대해 대칭적인 형태의 식의 값을 구하는 문제이므로, 근과 계수와의 관계를 이용하여 얻어지는 3가지 대칭적인 식의 값을 이용하여 풀려는 접근이 자연스럽다.

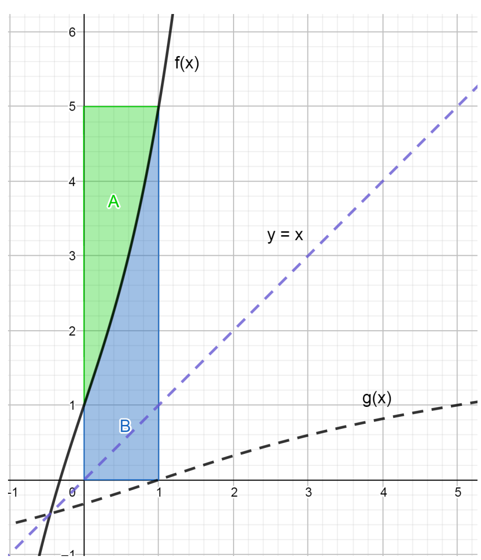
$\boxed{\text{2019년 8번}}$ 함수 $f(x) = x^3 + 3x + 1$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때,
$\int_1^5 g(x)\,dx = \boxed{}$ 이다.

[**풀이**] 답: $\frac{9}{4}$
아래의 그림을 참고하면, 우리가 구하고자 하는 값은 A 이고, 이는 직사각형의 넓이 5에서 B 를 뺀 값인데, B 는 $f(x)$ 를 적분하여 쉽게 구할 수 있다.

$$B = \int_0^1 x^3 + 3x + 1 dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 + x\right]_0^1 = \frac{11}{4}$$

따라서 구하고자 하는 값은

$$A = 5 - \frac{11}{4} = \frac{9}{4}$$



[그림 1]

[**채점 기준**] 답은 $\frac{9}{4}$ (또는 2.25) 라고 맞게 쓴 경우만 정답 처리함.

[**채점 소감**] 역함수가 원래 함수와 $y = x$ 에 대해 대칭이라는 기하학적 성질을 이용하면 어렵지 않게 풀 수 있는 문제다.
$x = f(t)$ 로 치환하여 계산할 수도 있다.

$\boxed{\text{2019년 9번}}$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n^2}\frac{\sqrt{k}}{n^3} = \boxed{}$ 이다.

[**풀이**] 답: $\dfrac{2}{3}$

$f(x) = \sqrt{x}$ 라고 놓았을 때,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n^2}\frac{\sqrt{k}}{n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n^2}\sqrt{\frac{k}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n^2} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$$

정적분의 정의에 의해

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n^2} f\left(\frac{k}{n^2}\right) = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

[**채점 기준**] 답을 $\dfrac{2}{3}$ 로 맞게 쓴 경우만 정답 처리함.

[**채점 소감**] 정적분의 계산 단원에 기본 예제로 나오는 정적분을 이용하여 급수를 계산하는 문제다.

$\boxed{\text{2019년 10번}}$ 정적분 $\displaystyle\int_0^4 e^{-\sqrt{x}}dx$ 의 값은 $\boxed{}$ 이다.

[**풀이**] 답: $2(1-3e^{-2})$

$t = \sqrt{x}$ 로 놓으면, $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ 이고, $x = 4$ 일 때 $t = 2$, $x = 0$ 일 때 $t = 0$ 이므로, 정적분의 치환적분법에 의해

$$\begin{aligned}\int_0^4 e^{-\sqrt{x}}dx &= \int_0^4 e^{-\sqrt{x}}\frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx = \int_0^2 e^{-t}2tdt \\ &= 2\left[-te^{-t} - e^{-t}\right]_0^2 = 2(-2e^{-2} - e^{-2} + 0 + 1) = 2(1-3e^{-2})\end{aligned}$$

[**채점 기준**] 같은 값을 의미하는 다른 형태의 표기를 포함하여, 답을 $2(1-3e^{-2})$ 라고 맞게 쓴 경우만 정답 처리함.

[**채점 소감**] 여러가지 함수의 정적분 단원에 나오는 치환적분법의 기본 예제다.

$\boxed{\text{2019년 11번}}$ 좌표공간의 네 점 $A(0,0,6\sqrt{2})$, $B(2\sqrt{3},0,0)$, $C(-\sqrt{3},3,0)$, $D(-\sqrt{3},-3,0)$으로 이루어진 사면체 $ABCD$에 내접하는 구의 반지름은 $\boxed{}$ 이다.

[**풀이**] 답 : $\sqrt{2}$

내접하는 구의 반지름을 r, 중심을 P라고 했을 때, 사면체 $ABCD$를 각 면을 밑면으로 하고 P를 꼭짓점으로 하는 사면체 4개로 쪼개어 생각할 수 있다. 이렇게 4개로 쪼개어 구할 경우 사면체 $ABCD$의 부피를 반지름 r에 대한 식으로 구할 수 있다.

한편 사면체 $ABCD$의 부피를 쪼개지 않고 바로 구할 수도 있어서, r에 대한 식을 얻을 수 있고 r의 값을 구할 수 있다.

* 쪼개어서 계산하는 경우 *

사면체 $ABCD$의 밑면은 한 변의 길이가 6인 정삼각형, 옆면은 전부 밑변의 길이가 6이고, 나머지 두 변의 길이가 $\sqrt{84}$인 이등변 삼각형이다. 따라서 네 사면체는 밑면의 넓이가 $9\sqrt{3}$인 것 한 개, $15\sqrt{3}$인 것이 세 개이므로,

$$(\text{사면체 ABCD의 부피}) = \frac{1}{3}(9\sqrt{3} + 3 \times 15\sqrt{3})r = 18\sqrt{3}r$$

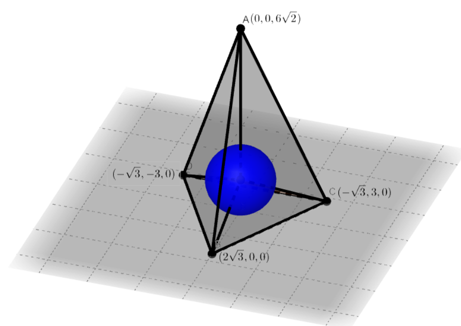
* 바로 계산하는 경우 *

사면체 $ABCD$는 삼각형 ABC를 밑면으로 하고, 높이가 $6\sqrt{2}$인 사면체다.

$$(\text{사면체 ABCD의 부피}) = \frac{1}{3} \times 9\sqrt{3} \times 6\sqrt{2} = 18\sqrt{6}$$

두 결과를 종합하면,

$$18\sqrt{3}r = 18\sqrt{6}, \qquad \therefore r = \sqrt{2}$$



[그림 2]

[**채점 기준**] 답을 $\sqrt{2}$라고 맞게 적은 경우만 정답 처리함.

[**채점 소감**] 문제의 조건에 따라 그림을 그려보면 간단한 모양의 사면체가 나와서, 풀이의 아이디어만 떠올린다면 어렵지 않게 풀 수 있다.

$\boxed{\text{2019년 12번}}$ ※ 국어 문제와 영어 문제의 말뜻이 약간 달라 모두 싣습니다.

(**국어**) 다음 명제가 참인지 거짓인지 판단하고 그 이유를 상세히 쓰시오.
"$p(x)$가 짝수 차수 다항식일 때, $y = p(x)$의 그래프는 x축과 평행한 접선을 가진다."

(**영어**) Determine whether the following statement is true or not. Justify your answer.
"Let $p(x)$ be a polynomial of even degree. Then the graph of $y = p(x)$ has a horizontal tangent line."

[**풀이**] (**국어**) 거짓이다. 반례를 들어, $p(x) = x^2$의 그래프에서 기울기 0인 접선은 $y = 0$으로 단 하나 존재하지만, 이는 x축과 일치한다.

(**영어**) 참이다. 우선 $p(x)$가 상수 a인 경우, 모든 점에서 접선이 $y = a$이고 이는 수평하다.

$p(x)$가 2차 이상의 다항식인 경우, $p'(x)$는 홀수 차수 다항식이므로 $p'(x)p'(-x)$는 최고차항의 계수가 음수인 짝수 차수 다항식이다. 따라서 $\lim_{x\to\infty} p'(x)p'(-x) = -\infty$이다. 그러므로 충분히 큰 양수 h에 대하여 $p'(h)p'(-h) < 0$이다. 그리고 $y = p'(x)$는 구간 $[-h, h]$에서 연속함수이므로, 사잇값 정리에 의해 적당한 $k \in (-h, h)$에 대해 $p'(k) = 0$이다. 이 k에서 $y = p(x)$의 그래프는 원하는 접선을 갖는다.

[**채점 기준**] 평면의 두 직선이 평행하다는 것은 만나지 않는다는 것이므로 서로 일치하는 두 직선은 평행이 아니다. 따라서 직선 $y = 0$은 x축과 평행하다고 말할 수는 없으나, 수평(horizontal)하다. 이에 결론을 참으로 하든 거짓으로 하든 점수를 모두 받을 수 있게 채점하였다. 결론을 거짓으로 말한 경우, 이유가 명확한 경우 7점. 결론을 참이라고 말한 경우에는 문제를 알맞게 이해하고 $p'(x)$가 0이 되는 점을 찾아야 함을 주장하면 3점, 나머지 증명이 맞으면 7점.

[**채점 소감**] 학생들이 많이 한 실수로 '짝수차 다항식'을 '모든 항의 차수가 짝수인 다항식'으로 잘못 이해하는 것, 무한대를 숫자와 비교하여 부등식을 세우는 것, 최고차항의 계수의 부호 등의 상황에 따라 틀릴 수도 있는 주장을 하는 것 등이 있다. 알고 있는 것을 정확한 방법으로 서술하는 연습이 필요해보인다.

$\boxed{\text{2019년 13번}}$ 자연수 n에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(a) $\displaystyle\int_1^n \ln x\,dx = n\ln n - (n-1)$ 임을 보이시오.

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{n!}$ 를 구하시오.

[풀이] (a) 부분적분법을 이용하여 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned}\int_1^n \ln x dx &= [x\ln x]_1^n - \int_1^n x\cdot\frac{1}{x}dx \\ &= n\ln n - [x]_1^n = n\ln n - (n-1)\end{aligned}$$

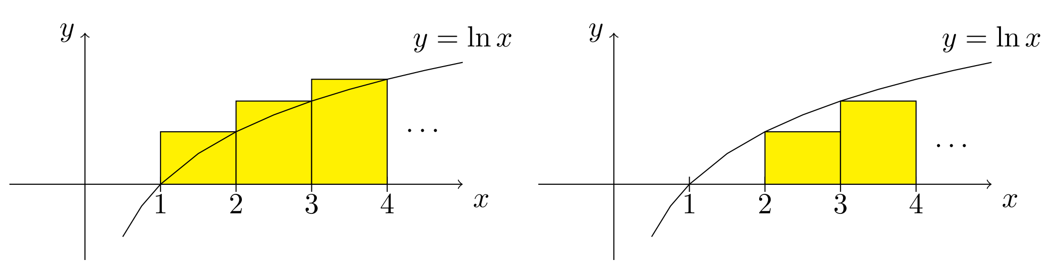
(b) 주어진 수열 $a_n = \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ 에 자연로그 ln을 취하여 극한을 구해보자.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \ln\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{n}{n}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k}{n} = \int_0^1 \ln x dx \\ &= \lim_{b\to 0+}\int_b^1 \ln x dx \\ &= -\lim_{b\to 0+}(b\ln b - b + 1) = -1 \\ &\quad \left(\because\ b = \frac{1}{x}\text{라고 놓으면 } \lim_{b\to 0+} b\ln b = \lim_{x\to\infty}\frac{-\ln x}{x} = 0\right)\end{aligned}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\ln\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = -1$ 이므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = e^{-1} = \frac{1}{e}$ 이다.

[다른 풀이] (a)와 조임 정리를 이용하여 극한을 구할 수도 있다.

다음의 [그림 3]을 생각하면 다음과 같은 부등식 (1)을 얻을 수 있다.



[그림 3] $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln k$ 의 값

$$\int_1^n \ln x dx \le \sum_{k=1}^{n}\ln k \le \int_1^{n+1}\ln x dx \tag{1}$$

(a) 에 의하여 첫번째 항은 $n\ln n - n + 1$, 세번째 항은 $(n+1)\ln(n+1) - n$ 이 나오고, 두번째 항을 정리했을 때 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln k = \ln(n!)$ 이다. 주어진 부등식의 각 변을 n 으로 나누고, $\ln n$ 을 빼면 다음과 같은 부등식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
\int_1^n \ln x dx \quad &\le \ln(n!) \le \quad \int_1^{n+1} \ln x dx \\
\ln n - 1 + \frac{1}{n} \quad &\le \ln \sqrt[n]{n!} \le \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)\ln(n+1) - 1 \\
\frac{1}{n} - 1 \quad &\le \ln \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \le \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)\ln(n+1) - 1 - \ln n
\end{aligned}$$

첫번째 항의 극한을 구하면 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} - 1\right) = -1$ 이고 세번째 항의 극한을 구하면

$$\lim_{n\to\infty}\left(\ln(n+1) - \ln n - \frac{\ln(1+n)}{n} - 1\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{\ln(1+n)}{n} - 1\right) = -1$$

이다. 따라서 조임 정리에 의하여 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\ln\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = -1$ 이고 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = e^{-1} = \frac{1}{e}$ 이다.

[**채점 기준**]

(a) 답을 옳게 구함 $\cdots$ 2점
- $*$ 부분점수 없음

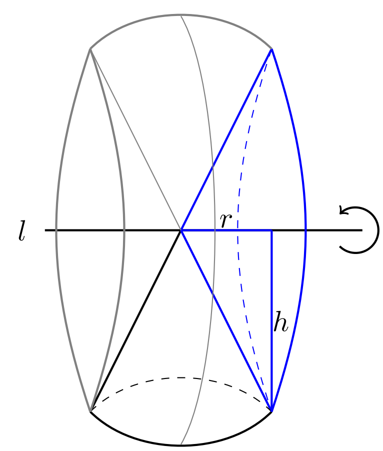
(b) 주어진 식에 로그를 취하여 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k}{n}$ 꼴로 나타냄 $\cdots$ 3점

올바른 값을 구하였음 $\cdots$ 2점
- $*$ 사소한 계산 실수는 1점 감점
- $*$ 조임 정리를 이용하여 푸는 경우 부등식이 옳지 않으면 점수 없음

[**채점 소감**] 학생들이 (b) 번 문제를 풀 때 극한의 수렴성을 고려하지 않고 계산하는 경우가 많았다. 대표적으로 $\sqrt[n]{\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdots\frac{n}{n}}$ 을 계산할 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ 이므로 답이 0이라고 구한 경우가 많았다. 하지만 $n \to \infty$ 일 때 곱해야 하는 항이 무한개이므로 임의로 극한값을 각자 구한 다음에 곱하는 것은 옳지 않다. 고등학교 때 배운 극한의 사칙연산 성질이 모두 극한값이 수렴하는 유한개의 항에 대해서만 성립한다는 것을 기억하는 것이 필요해보인다.

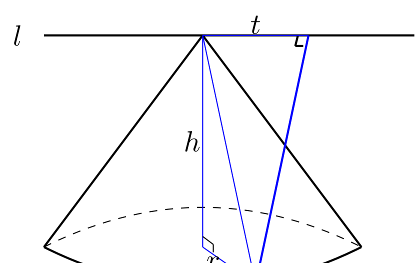
$\boxed{\text{2019년 14번}}$ 바닥면의 반지름이 r이고 높이가 h인 직원뿔을 D라 하고, D의 꼭짓점을 지나며 D의 바닥면에 평행한 직선을 l이라 하자. 이때 D를 l 둘레로 회전하여 얻는 회전체의 부피를 구하시오.

[**풀이**] 주어진 원뿔을 회전시켜 직선 l을 y축으로 생각할 수 있다. 회전시킨 도형은 밑면을 회전시킨 둥그런 기둥모양에서 모선이 회전하면서 만드는 기둥 내부의 원뿔 두개를 뺀 모양이 된다. 모선이 회전하면서 만드는 원뿔은 높이가 r, 밑면반지름이 h이므로 두 원뿔의 부피의 합은 $\frac{2}{3}\pi h^2 r$ 이다(그림 4 참고).



[그림 4] 모선이 회전하여 만드는 원뿔

큰 부분의 부피를 구하기 위해서는 밑면의 원과 l 사이의 최대 거리를 구해야 하는데, $y = t$로 원뿔을 자른 단면 위에서 l과의 거리는 밑면의 원주 위에서 $r_1^2 = h^2 + r^2 - t^2$으로 r_1이 최대가 됨을 알 수 있다.



[그림 5] 직선과 밑면의 최장거리

따라서 단면의 넓이는 $\pi(h^2+r^2-t^2)$이고 이를 적분하여 큰 부분의 부피를 구한다(그림 5 참고).

$$\begin{aligned}
\int_{-r}^{r} \pi r_1^2 dt &= \int_{-r}^{r} \pi \left(h^2 + r^2 - t^2\right) dt \\
&= 2\pi \int_0^r h^2 + r^2 - t^2 dt \\
&= 2\pi \left(h^2 r + r^3 - \frac{1}{3} r^3\right) \\
&= 2\pi \left(h^2 r + \frac{2}{3} r^3\right)
\end{aligned}$$

따라서 큰 부분의 부피에서 작은 부분의 부피를 빼면 답은

$$\frac{4}{3}\pi r\left(r^2+h^2\right).$$

[**채점 기준**] 작은 도형 (원뿔) 의 부피를 맞게 구했으면 4점.
큰 도형 (옆이 볼록한 기둥모양) 의 부피를 맞게 구했으면 7점.
큰 도형을 '밑면의 반지름이 $\sqrt{r^2+h^2}$ 인 원기둥' 이라고 생각하여 구했으면 0점.
각 부피를 구하는 데 사소한 실수가 있었을 시 -2점.

[**채점 소감**] 생각한 것보다 정확한 답을 구한 학생이 적었는데, 도형을 잘못 파악하거나 계산에서 실수를 범한 경우가 많다.

도형을 잘못 구한 경우는 대부분 원뿔이 회전한 도형을 양쪽 모선과 밑면의 지름을 이은 이등변 삼각형이 회전한 도형이라고 생각하여 큰 도형이 원기둥과 같다고 생각한 경우였다. 입체도형의 경우에 직관으로 정확한 모양을 파악하기 어렵기 때문에 근거를 찾을 수 없다면 모양을 특정하지 말고 식으로 표현해보기를 권한다.

계산실수였던 경우 가장 많았던 것은 답, 계산과정에서 줄이 넘어가면서 π가 사라지거나 처음부터 도형의 부피식에서 π가 나타나지도 않은 경우다. 학생들의 부피식을 몰라서 틀리지는 않았을 것이고, 연습장에 풀듯이 정리가 안되는 공통부분인 π 부분은 빼고 계산하다가 마지막에 덧붙이는 것을 까먹은 것이라 생각된다. 다른 실수들도 계산하다 공통인수로 빠져나온 2를 빼먹거나 $-$를 분배하다가 $+$로 바뀌는 경우가 대부분이었다. 이런 실수를 줄이기 위해 답안을 질서있게 정리하는 연습이 필요해 보인다.

$\boxed{\text{2019년 15번}}$ 실수에서 정의된 함수 f가 임의의 실수 x와 $0 < h < \dfrac{1}{2019}$에 대하여 다음 조건을 만족한다.

$$-4h|x| \le f(x+h) - f(x-h) \le 4h|x|$$

(a) 함수 f가 연속임을 보이시오.
(b) 만일 $f(1) = 1$이면, $x \ge 1$인 x에 대하여 $f(x) \le x^2$ 임을 보이시오.

[풀이]

(a) x 대신 $x+h$와 $x-h$를 대입하여 아래 식을 얻는다:

$$-4h|x+h| \le f(x+2h) - f(x) \le 4h|x+h|,$$
$$-4h|x-h| \le f(x) - f(x-2h) \le 4h|x-h|.$$

위의 식으로부터 $h \to 0+$인 극한을 구해보면

$$\lim_{h\to 0+} f(x+2h) = f(x) = \lim_{h\to 0+} f(x-2h).$$

따라서 함수 f는 연속.

(b) $x \ge 1$. $0 \le \dfrac{x-1}{2n} (=: h) \le \dfrac{1}{2019}$를 만족하는 충분히 큰 자연수 n을 고정한다. 문제의 식을 변형하여,

$$f(1+2nh) - f(1+2(n-1)h) \le 4h(1+(2n-1)h),$$
$$\sum_{i=1}^{k} [f(1+2nh) - f(1+2(n-1)h)] \le \sum_{i=1}^{k} 4h(1+(2n-1)h),$$
$$f(x) - f(1) \le 4h(n+n^2h)$$

위와 같은 결과를 얻고, $f(1) = 1$ 이므로

$$f(x) \le 4h(n+n^2h) + 1 = 4h^2n^2 + 4nh + 1 = (1+2h)^2 = x^2$$

을 얻는다.

[다른 풀이] $g(x)$를 $x^2 - f(x)$로 정의하면

$$\begin{aligned} g(x+h) - g(x-h) &\ge 4h - (f(x+h) - f(x-h)) \\ &\ge 4h(x + |x|) \\ &\ge 0 \end{aligned}$$

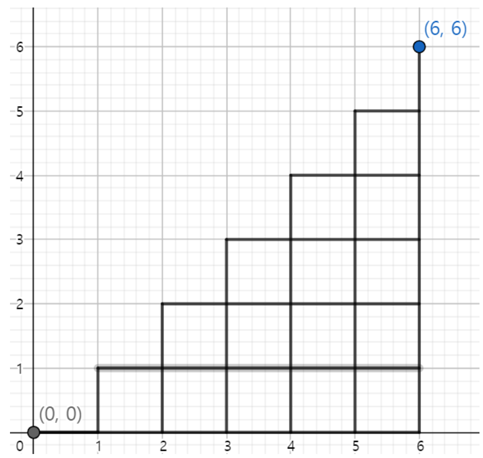
그러므로 g는 증가함수가 되고, $f(x) \le x^2$이 된다.

[채점 기준] (a)번에 5점 부여. 양쪽 극한과 함숫값이 같은 것을 보이면 5점, 한쪽 극한과 함숫값이 같은 것만 보이면 2점 부여. 양쪽 극한이 같고 함숫값과 한쪽 극한이 같다는 것의 언급이 있으면 논리 순서 상관 없이 5점 부여.
(b)번에 6점 부여. 올바른 접근을 했지만 $f'(0)$의 값을 구하지 못해 틀린 경우에 1점 부여, 그 외 부분점수 없음.

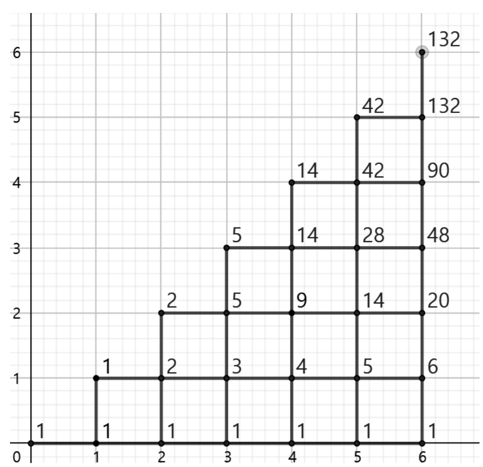
[채점 소감] 함수 f가 미분가능하다고 가정하고 푼 학생들이 많았고, h값의 범위를 생각하지 못했거나 연속의 개념을 제대로 이해하지 못해서 점수를 받지 못한 학생들도 많아 보였다. 함수의 연속이라는 개념을 확실히 이해하고 섣부른 가정을 하지 않고 문제를 푸는 것이 필요해 보인다.

$\boxed{\text{2019년 16번}}$ 괄호 여러 쌍을 '문법에 맞게' 배열하려고 한다. 이때 '문법에 맞게' 라는 말은 문장 중간 어디에서도 그때까지 나타난 여는 괄호 '(' 의 개수가 닫는 괄호 ')' 의 개수보다 적지 않아야 함을 의미한다. 예를 들어 괄호 두 쌍을 배열할 때 (()) 나 ()() 는 문법에 맞지만 ())(는 문법에 맞지 않는다. 이 때 여섯 쌍의 괄호를 문법에 맞게 배열하는 모든 방법의 수를 구하시오.

[풀이] 괄호 '(' 를 $\rightarrow$ 에, ')' 를 $\uparrow$ 에 대응시키면 문법에 맞는 괄호 6쌍의 배열은 아래 [그림 6] 과 같은 좌표평면 위의 격자를 따라 (0,0) 에서 (6,6) 으로 가는 최단거리의 경로에 대응된다. 따라서 그러한 경로의 수를 세면 되며, 이는 [그림 7] 와 같이 계산할 수 있다.



[그림 6]



[그림 7]

[채점 기준]

- 위 풀이 기준으로 '문법에 맞는 괄호의 배열' 을 적절한 격자 위의 경로에 대응시켰을 경우 +7점
  답까지 정확하게 계산하였을 경우 +4점
- 다른 방법으로 계산했을 경우, 전체 경우 중 옳게 푼 부분의 비율에 따라 최대 +7점 부여.
- 경우의 수를 세는 문제임을 감안하더라도 풀이에 설명이 지나치게 부족한 경우 감점이 있음.

[**채점 소감**] 대부분의 경우 위 풀이와 같은 일대일대응을 생각하였는지에 따라 문제 해결 여부가 정해졌다. 하지만 이 문제는 경우를 잘 나누어 세기만 하여도 풀 수 있는 문제인데, 그렇게 접근한 많은 학생들이 각 경우를 셀 때 놓치거나 중복하여 세는 실수를 범하였다. 어떤 방향으로 접근하든, 경우의 수 문제를 풀 때는 꼼꼼하게 빠짐없이, 중복하지 않게 세는 방법을 생각하는 것이 중요하다.