미적분학 1 중간고사

(2022년 4월 16일 오후 1:00–3:00)

학번:	이름:

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 150점)

문제 1. [5점] 다음 급수의 수렴 여부를 판정하시오.

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(n^2+2)(n^2-4)}{(n^2+1)(n^2-2)n}$$

문제 2. [10점] 다음 거듭제곱급수의 수렴반경을 구하시오.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^{\frac{1}{n}}}$$

문제 3. [15점] 거듭제곱급수 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$의 수렴반경이 $r > 0$일 때, 다음 거듭제곱급수가 가질 수 있는 수렴반경으로 가능한 것을 모두 구하시오.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$$

문제 4. [15점] 모든 실수 x에 대하여 정의된 두번 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수에 x에 대하여 $f'(x) \neq 0$를 만족한다. 원점에서 f의 2차 근사다항식이 $3 + 8x + \frac{1}{2}x^2$일 때, $f(x)$의 역함수 $g(y)$에 대하여 $y = 3$에서 $g(y)$의 2차 근사다항식을 구하시오.

문제 5. [15점] 다음 극한값을 구하시오.

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x \log x} - \frac{1}{x^x - 1} \right)$$

문제 6. [15점] 원점에서 함수 $f(x) = e^x \cos x$의 3차 근사다항식을 구하고, 3차 테일러 나머지항 $R_3 f(x)$에 대하여 $|R_3 f(1)| \leq \frac{\sqrt{2}}{12} e^{\frac{\pi}{4}}$가 성립함을 보이시오.

〈 풀이 〉

문제 7. [15점] $\cosh x$에 대해 테일러 정리를 이용하여 다음 정적분 값을 오차가 10^{-3} 이하가 되도록 구하시오. (단, 근삿값은 유리수로 구하시오.)

$$\int_0^1 \frac{\cosh x - 1}{x^2}\,dx$$

문제 8. [15점] 삼차원 좌표공간에서 직교좌표계 (x, y, z)로 나타낸 다음 두 영역

$$A : z \geq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}, \quad B : z \leq 1$$

에 대하여, A를 구면좌표계 (ρ, φ, θ)로 표현하고 A와 B가 겹치는 부분의 부피를 구하시오.

문제 9. [10점] 자연수 n에 대하여, 좌표평면에서 극좌표계로 표현된 곡선 $r = \sin(n\theta)$의 그래프가 가지는 잎의 개수를 a_n이라고 하자. 이때 다음 급수의 수렴 여부를 판정하시오.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{a_n}$$

문제 10. [10점] 자연수 n에 대하여, 삼차원 좌표공간에서 구면좌표계 (ρ, φ, θ)로 나타낸 곡선

$$\{(\rho, \varphi, \theta) \mid \varphi = \arcsin(1/n), \quad \rho = 1\}$$

의 길이를 l_n이라 할 때, 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{l_n}{2^n}$의 합을 구하시오.

문제 11. [15점] 수열 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$이 다음 관계를 만족한다고 하자.

$$a_1 = 1, \quad a_n = \sqrt{2a_{n-1}+3} \quad (n \geq 2)$$

이때, 실수의 완비성을 이용하여 극한 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$이 존재함을 보이고, 그 값을 구하시오.

문제 12. [10점] 다음 급수의 수렴 여부를 판정하시오.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\frac{1}{\sqrt{n}}$$