2001학년도 수학 능력 측정시험 문제지 및 풀이 / 채점소감

단1. 구간 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 에서 정의된 함수 $f(x) = \sin x$ 의 역함수를 $g : [0,1] \to [0, \frac{\pi}{2}]$ 라 할 때, 정적분 $\int_0^1 g(x)dx$ 의 값은 $\boxed{(8점)}$ 이다.

[풀이] 역함수는 직선 $y = x$에 대칭이므로

$$\int_0^1 g(x)dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \frac{\pi}{2} - 1$$

임을 알 수 있다.

단2. 좌표공간에 주어진 평행사변형을 xy-평면, yz-평면, xz-평면에 정사영한 것의 넓이가 각각 1cm^2, 4cm^2, 8cm^2 일 때, 처음 주어진 평행사변형의 넓이는 $\boxed{(8점)}$ cm^2 이다.

[풀이] 주어진 평행사변형이 xy-평면, yz-평면, xz-평면과 이루는 각을 각각 α, β, γ라 하자. 평행사변형의 넓이를 S라 하면,

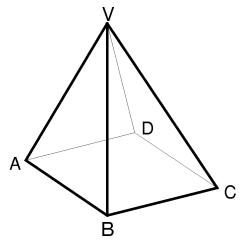
$$S\cos\alpha = 1, S\cos\beta = 4, S\cos\gamma = 8$$

이 된다. 그런데 α는 주어진 평행사변형의 법선벡터와 z축이 이루는 각과 같다. 마찬가지로 β, γ는 각각 x-축, y-축과 이루는 각과 같다. 그러면, 방향코사인법칙에 의해 $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ 이고

$$S^2\cos^2\alpha + S^2\cos^2\beta + S^2\cos^2\gamma = 1 + 16 + 64 = 81.$$

그러므로 $S = 9$이다.

단3. 다음은 정사각형을 밑면으로 하고 옆면들이 모두 정삼각형인 사각뿔의 그림이다.



이 때, $\overrightarrow{VD} = \boxed{(2점)}\,\overrightarrow{VA} + \boxed{(2점)}\,\overrightarrow{VB} + \boxed{(2점)}\,\overrightarrow{VC}$ 이다.

[풀이] 그림에서

$$\overrightarrow{VD} + \overrightarrow{VB} = \overrightarrow{VA} + \overrightarrow{VC}$$

이다. 그러므로

$$\overrightarrow{VD} = (1)\overrightarrow{VA} + (-1)\overrightarrow{VB} + (1)\overrightarrow{VC}$$

가 된다.

단4. 복소수 $z = 1 + i$ 에 대하여 복소평면 위에서 $1, z, z^2$, z^3, z^4 이 나타내는 점들을 꼭지점으로 하는 다각형의 넓이는 $\boxed{(8점)}$ 이다.

[풀이] 먼저 계산에 의해

$$\begin{aligned} z &= 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right), \\ z^2 &= 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right), \\ z^3 &= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right), \\ z^4 &= 4(\cos\pi + i\sin\pi). \end{aligned}$$

임을 알 수 있다. 이제 S_1을 0(원점), 1, z^1으로 이루어진 삼각형의 넓이, S_2을 0, z, z^2 으로 이루어진 삼각형의 넓이, S_3를 0, z^2, z^3 으로 이루어진 삼각형의 넓이, S_4를 0, z^3, z^4 으로 이루어진 삼각형의 넓이라고 하면, 원하는 다각형의 넓이는

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4$$

가 된다. 한편, $S_1 = \frac{1}{2}$, $S_2 = 1$, $S_3 = 2$, $S_4 = 4$ 이므로(모두 직각삼각형의 넓이이므로 쉽게 구할 수 있다) 다각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} + 1 + 2 + 4 = \frac{15}{2}$$

이다.

단5. $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{x}{x-3}\int_3^x e^{t^2}dt$ 의 값은 $\boxed{(8점)}$ 이다.

[풀이] $f(t) = e^{t^2}$ 이라 놓고 $f(t)$의 부정적분함수를 $F(t)$ 라고 하면,

$$\lim_{x\to 3} \frac{x}{x-3} \int_3^x e^{t^2} \mathrm{d}t = \lim_{x\to 3} \frac{x\{F(x) - F(3)\}}{x-3}.$$

이때,

$$\lim_{x\to 3} \frac{F(x) - F(3)}{x-3} = F'(3) = f(3) = e^9$$

이므로,

$$\lim_{x\to 3} \frac{x\{F(x) - F(3)\}}{x-3} = (\lim_{x\to 3} x) \left(\lim_{x\to 3} \frac{F(x) - F(3)}{x-3} \right) = 3e^9.$$

서1. 함수 f 가 미분가능하고 $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 2$ 일 때,

$$\lim_{x\to\infty} [f(x+1) - f(x-1)]$$

의 값을 구하라. (12점)

[풀이] 평균값정리에 의해서

$$\frac{f(x+1) - f(x-1)}{(x+1) - (x-1)} = f'(c)$$

인 c가 $(x-1, x+1)$에서 존재하므로

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x+1) - f(x-1)}{(x+1) - (x-1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x+1) - f(x-1)}{2} = \lim_{x\to\infty} f'(c)$$

이다. 그런데 $x - 1 < c < x + 1$ 이므로, $x \to \infty$이면 $c \to \infty$이다. 따라서,

$$\lim_{x\to\infty} \{f(x+1) - f(x-1)\} = 2 \lim_{c\to\infty} f'(c) = 4.$$

[채점기준]

1. $f(x) = 2x + c$ 로 두고 풀면 0점
2. $\big(x-1, f(x-1)\big), \big(x+1, f(x+1)\big)$ 사이의 평균변화율이 $x \to \infty$ 일 때 미분값으로 수렴한다고 해서 풀면 6점

[채점소감]

- 미분의 정의에 대한 이해가 부족함 $\frac{f(x+1)-f(x)}{1} = f'(x)$ 라고 쓴 학생들이 아주 많았음
- 가장 많이 나왔던 오답은 특별한 함수 $f(x) = 2x + c$ 에 대해서만 보이고 그것이 일반적인 결과라고 주장하는 경우였음
- 고등학교 수학에서 수학적인 개념을 기초부터 정확하게 공부하지 않고 문제를 푸는 방법만을 익히다보니 정확한 개념을 묻는 문제를 어려워함

서2. 좌표공간에서 점 $A(0,1,2)$ 에서 출발하여 평면 $x+y+z=1$ 의 점 P를 거쳐 점 $B(1,1,1)$에 도착할 때, 움직인 거리가 최소가 되게 하는 점 P의 좌표를 구하라. (12점)

[풀이] 두 점 A, B 가 평면 $\alpha : x+y+z=1$ 에 관하여 같은 쪽에 있으므로, 점 B 의 평면 α 에 관한 대칭점을 B' 이라 하면, 두 점 A와 B를 잇는 직선과 평면 α가 만나는 점이 P이다. $B' = (a,b,c)$ 라 하면, B와 B' 의 중점이 평면 α위에 있고 벡터 $B - B'$이 평면 α에 수직이므로

$$\frac{a+1}{2} + \frac{b+1}{2} + \frac{c+1}{2} = 1$$

$$(a-1, b-1, c-1) = k(1,1,1), \quad (k\text{는 실수})$$

연립방정식을 풀면, $B' = (-1/3, -1/3, -1/3)$. A와 B' 을 잇는 직선의 방정식은

$$x = \frac{y-1}{4} = \frac{z-2}{7}.$$

이 직선과 평면 α 의 교점은 $P = \left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{5}{6}\right)$.

[채점기준]

1. P의 위치를 제대로 파악하면 2점
2. B'을 제대로 구하면 6점
3. 과정은 다 맞는데 계산이 틀리면 4점 감점

[채점소감]

- 일단 만점을 받은 학생들은 30% 정도밖에 없다.
- 많은 학생들이 대칭점 B' 을 계산 없이 직관적으로 (0,0,0) 혹은 (-1,-1,-1)이라고 썼다.

- 계산을 틀린 학생이 상당히 많다. 대칭점을 구하는 과정에서보다 직선의 방정식과 교점을 구하는 과정에서 계산을 틀린 학생이 더 많았다.
- 간혹 점 P가 아니라 '최단거리'를 구한 학생들도 있다. 이 학생들은 대칭점을 구한 경우 6점을 주었다.
- 몇몇 학생들은 점 A와 B가 평면까지의 거리가 같다는 사실에 착안하여 중점의 수선의 발을 구하였다. 만점.
- 어떤 학생들은 대칭을 시키지 않고 두 점 A 와 B를 잇는 직선이 평면과 만나는 점을 구하려 하였다. 0점.

서3. 일차변환 f는 점 $(0,2)$를 점 $(0,1)$로 옮기고, 타원 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ 을 원 $x^2+y^2=1$ 로 옮긴다. 일차변환 f를 나타내는 행렬을 모두 구하라. (12점)

[풀이] $f:(x,y)\to(x',y')$인 행렬 f를 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$로 놓자. 조건에 의해

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

이므로 $2b=0$, $2d=1$. 따라서 $b=0$, $d=\frac{1}{2}$. 따라서 $f=\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$이고

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

이므로 $ax=x'$, $cx+\frac{1}{2}y=y'$ 을 얻을 수 있다. (x',y')는 원 $x^2+y^2=1$위의 점이므로 $(ax)^2+(cx+\frac{1}{2}y)^2=1$. 그러므로 $a=\pm1$, $c=0$. 즉, 구하고자 하는 f는 $\begin{pmatrix} \pm1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$이 된다.

[채점기준]

1. b와 d를 제대로 구하면 3점
2. (x',y')을 제대로 치환하여 식을 얻으면 9점
3. a를 구할 때, ±1중 하나만 구한 경우 총6점
4. $(0,1)$을 $(1,0)$으로 놓고 풀어서 풀이 과정이 맞으면 총6점
5. 답은 맞는데 변환이 두 가지 밖에 없다는 것을 안 보이면 총9점

6. 답만 쓴것은 개당 3점씩
7. 정답을 포함하여 답이 여러 개면 총6점
8. 계산 실수 2점 감점

[**채점소감**] 우선, 답을 정확히 푸는 학생이 많았고, 특히 자연대 학생들이 그러했다. 그러나 계산과정을 보이지 않고 직관적으로 답만 적는 학생이 많았다. 그리고 학생들이 많이 감점을 당한 요인은

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

에서 a의 값을 구할때, 항등식을 못 풀어 엉뚱한 답을 적어 감점을 당했다. 이 문제에서는 특히 기발한 아이디어가 있었다. 타원과 원의 넓이, 행렬식을 이용하여 a를 구하는 경우 였다. 즉 "(타원의 넓이)× (행렬식의 절대값)=(원의 넓이)"를 이용했다. 요약하면, 대체로 모범답안에 충실했고 풀이 방법이 제한적이어서 채점을 하는데 있어서 어려운점이 없었다.

서4. $x \geq 0$ 일 때, 함수 $f(x) = x + \cos x - \sin x$ 의 최소값을 구하라. (12점)

[**풀이**]

$$f(x) = x + \cos x - \sin x = x + \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

이므로,

$$f'(x) = 1 - \sin x - \cos x = 1 - \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$
$$f''(x) = -\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{4}{2}\right)$$

이다. 따라서 $f(x)$의 극점은 $2n\pi$, $2n\pi + \frac{\pi}{2}$이고, 특히 $x = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$이 극소점이다. 그런데 $y = x$는 증가함수이고 $y = \cos x - \sin x$는 주기가 2π인 주기함수이다. 이 때, $f(0) = 1$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \frac{\pi}{2}$이고, $x \geq 2\pi$일 때, $f(x) \geq 1$이므로, $f(x)$의 최소값은 $x = \frac{\pi}{2}$일 때 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - 1$이다.

[**채점기준**]

1. $f(x)$의 미분을 제대로 구했으면 3점
2. $f(x)$의 극점들을 제대로 구했으면 6점
3. $f(x)$의 최소값이 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - 1$임을 맞게 계산했으면 12점.

4. 극점에서의 함수값은 제대로 계산했으나 다른 값을 최소값으로 제시한 경우에는 9점

[**채점소감**] 그림을 이용하여 직관에만 호소하여 답을 구하려고 하는 학생들도 있었지만 대부분의 학생들이 미분을 이용하여 최소값을 구하는 방법은 잘 알고 있었다. 그러나 삼각함수 계산 능력이 미숙한 학생들이 예상외로 많았다. 우선 삼각함수의 미분을

$$(\cos x)' = \sin x, \quad (\sin x)' = -\cos x$$

로 혼동하는 학생들이 있었고, $f'(x) = 0$을 계산하는 과정에서 식 $1 - \sin x - \cos x$을 $1 - \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$로 제대로 바꾸지 못하고 부호가 틀리는 경우가 많았다. 특히 $f'(x) = 1 - \sin x - \cos x = 0$을 계산할 때, 양변을 제곱한 후 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$을 이용하여 계산하는 학생들이 많았는데, 제곱했기 때문에 생기는 불필요근 $x = \pi$ 등을 극점이라고 착각하는 경우가 아주 많았다. 그리고 마지막 단계에서 1과 $\frac{\pi}{2} - 1$의 대소비교를 잘못하는 경우도 많았다.

많은 학생들이 삼각함수의 기본공식을 다루는 능력과 계산을 정확하게 끝마치는 능력이 부족했다.

서5. 좌표평면 위를 움직이는 점 $P(x, y)$ 가 $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $0 \le t \le 2\pi$ 를 만족할 때,

(1) $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{3}$ 이 되는 t를 구하라. (7점)

[**풀이**] 먼저 $\frac{dx}{dt} = 1 - \cos t$, $\frac{dy}{dt} = \sin t$ 이므로

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \sqrt{3}$$

을 정리하면, $\sqrt{3}\cos t - \sin t = 2\sin(t + \frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$ 이다. 그러므로 $t = 0, \frac{\pi}{3}, 2\pi$. 그러나 $t = 0, 2\pi$는 분모를 0으로 만들기 때문에 $t = \frac{\pi}{3}$이 답이다.

[**채점기준**]

1. $\frac{dy}{dx}$ 계산을 못했다. 0점
2. 올바른 방정식을 세웠으나 해를 잘못 구했다. 3점
3. 방정식의 해는 제대로 구했으나 무연근을 제외하지 않았다. 또는 방정식의 모든 해를 구하지 않았으나 무연근을 제외하는 과정을 서술하여 정답을 구했다. 5점

4. 완벽한 풀이와 답을 구했다. 7점

[채점소감] 채점을 해본 결과 학생들이 매개변수가 주어진 함수의 미분계산에 취약함을 알 수 있었다. 또한 간단한 삼각방정식의 해결에도 미숙한 모습을 많이 보였고 방정식을 푼 후 그 해를 음미하는 연습이 부족해 보였다.

(2) $0 \le t \le 2\pi$ 동안 점 P가 움직인 거리를 구하라. (7점)

[풀이] 움직인 거리를 ℓ 이라 두면,

$$\begin{aligned}
\ell &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos t)^2 + (\sin t)^2} dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t} dt \\
&= 2\int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\sin \frac{t}{2}\right)^2} dt \\
&= 2\int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt \\
&= 8.
\end{aligned}$$

[채점기준]

1. 틀렸다. 0
2. 첫번째 등식만 썼다. 1점
3. 세번째 등식까지 계산했다. 3점
4. 다섯번째 등식까지 계산했으나 계산 실수로 답이 틀렸다. 5점
5. 완벽한 풀이와 답을 구했다. 7점

[채점소감] 채점을 해본 결과 학생들이 구체적인 적분계산에 취약함을 알 수 있었다. 특히 초월함수의 적분에 약한 면모를 보였다. 또한 삼각함수의 반각공식도 모르는 사람이 많았다. 또 한가지 언급할 점은 실제 계산에서 많은 학생들이 실수를 범한 것에서 유추할 때 계산 연습이 부족함을 알 수 있었다.