2002년 수학 성취도 측정시험 문제지 및 풀이 / 채점소감

답안지 작성시, 단답형은 답만 쓰고 서술형은 답과 함께 풀이과정을 간단명료하게 쓰시오. 문항당 단답형은 8점, 서술형은 12점입니다.

1. (단답형) 극한값 $\ell = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$을 구하여라.

[풀이]

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \cdot \frac{1}{n} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx \\ &= [\ln(1+x)]_0^1 \\ &= \ln 2\end{aligned}$$

2. (단답형) 기울기가 $\sqrt{3}$이고 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$에 접하는 두 접선 사이의 거리 d를 구하여라.

[풀이] 접선을 $y = \sqrt{3}x + k$라 두면, 방정식

$$1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{(\sqrt{3}x+k)^2}{b^2}$$

이 중근을 가진다. 그러므로 판별식이 0이고, 따라서

$$D = 3a^4k^2 - (3a^2+b^2)(a^2k^2 - a^2b^2) = 0.$$

그러므로 $k = \pm\sqrt{3a^2+b^2}$이다. 그런데 접선이 x축과 이루는 각이 60°이므로

$$|k| = 2 \cdot \frac{d}{2}$$

가 된다. 따라서 $d = \sqrt{3a^2+b^2}$이다.

[별해] 타원과 교차하는 직선을 $y = \sqrt{3}x + k$라 두면, 코시-쉬바르츠 부등식에 의해

$$\begin{aligned}(y - \sqrt{3}x)^2 &\le ((\sqrt{3}a)^2 + b^2)\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right),\\ k^2 &\le (3a^2 + b^2),\\ k &\le \sqrt{3a^2 + b^2}.\end{aligned}$$

그리고 위에서 실제로 등호가 성립하는 경우가 접선의 경우이다. 그런데 $k = 2 \cdot \dfrac{d}{2}$이므로 $d = \sqrt{3a^2 + b^2}$이다.

3. (단답형) 함수 $g(x)$에 대하여 $g(1) = 1$, $g'(1) = 2$라 하고 $f(x) = g(xg(x))$라 할 때, $f'(1)$의 값을 구하여라.

[풀이]

$$\begin{aligned}f'(x) &= g'(xg(x)) \cdot (g(x) + xg'(x))\\ f'(1) &= 6\end{aligned}$$

4. (a) (단답형) 미분의 평균값 정리를 기술하여라.

[풀이] 함수 $f(x)$ 가 $[a, b]$ 에서 연속이고, (a, b) 에서 미분가능할 때, $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ 를 만족하는 c 가 a 와 b 사이에 존재한다.

(b) (서술형) 미분의 평균값 정리를 이용하여 다음을 보여라.

$$\frac{1}{48} < \sqrt[3]{28} - 3 < \frac{1}{27}.$$

[풀이] $f(x) = \sqrt[3]{x}$라 놓으면, 구간 $[27, 28]$에서 평균값 정리에 의해,

$$f'(c) = \frac{f(28) - f(27)}{28 - 27} = \sqrt[3]{28} - 3$$

인 c가 27과 28 사이에 존재한다. 그런데

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

는 감소함수이고, $f'(27) = \dfrac{1}{27}$, $f'(64) = \dfrac{1}{48}$이므로

$$f'(64) = \frac{1}{48} < f'(c) = \sqrt[3]{28} - 3 < f'(27) = \frac{1}{27}.$$

[채점기준]

(a) 함수를 잘 택하고 구간 $[27, 28]$에서 평균값 정리를 적용하면 4점.

(b) $f'(64)$와 $f'(27)$의 값을 잘 찾고, $f'(x)$가 감소함수임을 이용하여 주어진 부등식을 얻으면 12점.

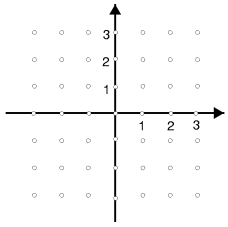
(c) $f'(x)$가 감소함수임을 밝히지 않으면 4점 감점.

(d) 그외에 c가 27과 28 사이에 있다는 것을 적당히 이용하여 원하는 부등식을 직접 이끌어 내는 풀이가 있는데, 논리가 맞고 계산이 정확하면 만점을 주었고 계산 실수가 있을 때는 4점 감점하였음.

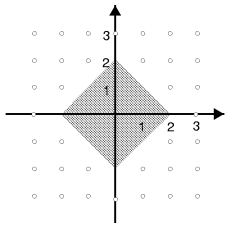
[채점소감] 4(a)번을 정확히 푼 학생들은 많이 있었으나 4(b)를 정확히 푼 학생들은 그리 많지 않았다. 이론은 잘 알지만 그 이론을 구체적인 상황에 적용하지 못한 것이다. 그리고 $f'(x)$가 감소함수임이 풀이 과정 중에서 매우 중요한데 이 부분을 언급하지 않고 넘어가는 학생들이 많았다. 물론 학생들 본인은 그 사실을 알고 있었겠지만 답안지에 쓸 때는 다른 사람이 이해할 수 있도록 핵심 내용을 빠트리지 않고 적어 주어야만 한다. 서술형 답안지를 작성하는 연습이 부족했기 때문이라고 생각된다.

5. 복소평면의 영역 $A = \{\, z = x + yi \ : \ |x| \leqq 1,\ |y| \leqq 1,\ x, y\text{는 실수} \,\}$에 대하여,

(a) (단답형) 영역 $B = \{\, (1+i)z \mid z \in A \,\}$를 복소평면에 도시하여라.



[풀이] 아래 그림의 회색부분(경계포함)



(b) (서술형) 영역 $C = \{\, z^2 \mid z \in A \,\}$의 넓이를 구하여라.

[풀이] $z = x + yi$라 두면 $z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$이다. 먼저 영역 A의 경계를 옮기자. 우선 경계 $x = \pm 1, -1 \le y \le 1$은 $X = 1 - y^2, Y = \pm 2y$이므로

$$X = 1 - \frac{Y^2}{4}, \quad -2 \le Y \le 2$$

으로 옮겨진다. 그리고 경계 $y = \pm 1,\ -1 \le x \le 1$은 $X = x^2 - 1, \quad Y = \pm 2x$ 이므로

$$X = \frac{Y^2}{4} - 1, \quad -2 \le Y \le 2$$

으로 옮겨진다. 그리고 A의 내부는 C의 내부로 옮겨진다. 그러므로

$$\begin{aligned} S &= 2\int_{-2}^{2} \left(1 - \frac{Y^2}{4}\right) dY = 4\int_{0}^{2} \left(1 - \frac{Y^2}{4}\right) dY \\ &= 4\left[Y - \frac{Y^3}{12}\right]_0^2 = \frac{16}{3}. \end{aligned}$$

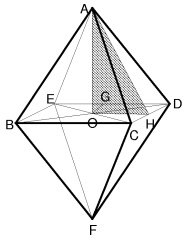
[채점기준]

(a) 영역을 제대로 옮기면 5점
(b) 적분식을 제대로 세우면 10점
(c) 적분계산을 제대로 하면 12점

[채점소감] 많은 수의 학생들이 주어진 영역의 꼭지점만 이동시키고, 나머지 부분이 옮겨지는 영역은 계산하지 않고 추측만으로 타원 또는 마름모로 옮겨진다고 답했다. 그러나 옮겨지는 영역의 경계는 두 개의 포물선이었다. 그리고 적분식을 잘못 쓴 학생들이 있었는데 그 학생들이 적분을 올바르게 이해하고 있는지 의심이 간다.

6. (서술형) 정팔면체에 내접하는 구와 외접하는 구의 지름의 비를 구하여라.

[풀이] 풀이 1)



위 정팔면체의 한 변의 길이를 a, 외접구의 반지름을 R이라 하자. R은 한 변의 길이가 a인 직각이등변삼각형 $\triangle BCD$의 빗변 $\overline{BD}$의 길이의 $\frac{1}{2}$이므로,

$$R = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

내접구의 반지름 r은 직각삼각형 $\triangle AOH$의 한 꼭지점 O에서 빗변 $\overline{AH}$에 내린 수선 $\overline{OG}$의 길이와 같다. 그런데 $\overline{OA} = R$, $\overline{OH} = \frac{a}{2}$ 이고 $\overline{AH} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$(정삼각형 $\triangle ACD$의 높이)이므로, 삼각형 $\triangle AOH$의 넓이는

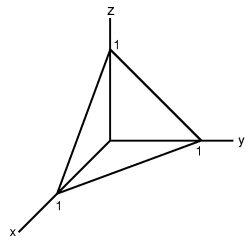
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot r = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{a}{2}$$
$$\therefore r = \frac{a}{\sqrt{6}}.$$

따라서

$$\text{내접구의 지름} : \text{외접구의 지름} = 2r : 2R = 1 : \sqrt{3}.$$

풀이 2) 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 k인 구에 내접하는 정팔면체를 생각하자. 이 때 한 면을 구성하는 정삼각형의 꼭지점은 각각 $(k, 0, 0)$, $(0, k, 0)$, $(0, 0, k)$이다. 내접구의 반지름의 길이 d는 원점에서 그 면까지의 거리이므로, 평면의 방정식

$$x + y + z = k$$



에서

$$d = \frac{k}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{k}{\sqrt{3}}.$$

따라서

$$\text{내접구의 지름} : \text{외접구의 지름} = \frac{k}{\sqrt{3}} : k = 1 : \sqrt{3}.$$

[채점기준]

(풀이 1의 채점 기준)

(a) 외접구의 지름을 바르게 계산하면 4점.

(b) 내접구의 지름을 바르게 계산하면 8점.

(c) 단면을 잘 잡고 아이디어도 정확한데 계산이 틀릴 경우 4점 감점

(풀이 2의 채점 기준)

(a) 좌표를 바르게 잡고 내접원의 반지름이 원점에서 평면사이의 거리와 같다는 사실을 명기하면 4점.

(b) 내접구의 지름을 바르게 계산하면 8점.

(c) 계산 실수 4점 감점

[채점소감] 전체적으로 많은 학생들이 수학 문제에 대한 서술형 답안을 쓰는 방법을 잘 모르고 있었다. 서술형 문제의 답을 쓸 때에는 답이 나오게 된 과정을 분명히 써야 한다. 계산이 복잡하다면, 중요한 단계만을 따로 뽑아 쓸 수도 있다. 하지만 대부분의 문제들은 계산을 그렇게 복잡하게 하도록 요구하지는 않았다. 아무런 근거없이 갑자기 구의 반지름을 "계산해보면" 얼마가 나온다는 설명은 전혀 의미가 없다. 그래서, 채점할 때, 그림을 정확히 그렸는지, 문제를 푸는 아이디

어는 적절했는지에 중점을 두고 채점을 했다. 혹시나 계산 과정을 모두 생략한 채 정답만을 적은 학생이 있었다면 점수를 얻지 못했을 것이다. 반면, 그림도 옳고, 아이디어도 훌륭했는데 중간 계산 과정에서 조금 실수가 있었다면 많은 부분 점수를 얻을 수 있었다. 6번 문제는 그림을 정확히 그렸다면, 그래서 어느 단면을 이용해야 문제를 쉽게 풀 수 있는지를 깨달았다면, 중학교 때 배운 피타고라스 정리만으로도 풀 수 있는 평이한 문제였다. 몇몇 학생들은 정팔면체를 공간좌표에 적절히 배치하여, 평면과 점사이의 거리를 구하는 방법으로 내접구의 반지름을 쉽게 계산하였는데, 참 좋은 아이디어이다. 정팔면체의 부피가 각각 다른 밑면을 중심으로 계산하여도 같음을 이용하여 내접구의 반지름을 계산한 것도 훌륭한 방법이었다. 마지막으로 덧붙이자면 정팔면체를 정팔각형으로 착각하여 문제를 풀어서 틀린 학생들이 꽤 있었다.

7. (서술형) 극한값 $\lim_{s\to\infty}\int_0^s \frac{2x}{(x+1)(x^2+1)}\,dx$를 구하여라.

[풀이] 우선

$$\frac{2x}{(1+x)(x^2+1)} = \frac{-1}{1+x} + \frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2}$$

이다. 그런데

$$\int_0^s \frac{-1}{1+x} + \frac{x}{1+x^2}\,dx = \ln\frac{\sqrt{s^2+1}}{s+1}$$

이고, $\int_0^s \frac{1}{1+x^2}\,dx$는 x를 $\tan\theta$로 치환하여 적분하면

$$\int_0^s \frac{1}{1+x^2}\,dx = \theta_0 \ (\text{단, } \tan\theta_0 = s)$$

가 된다. 그러므로

$$\lim_{s\to\infty}\int_0^s \frac{2x}{(1+x)(1+x^2)}\,dx = \lim_{s\to\infty}\left(\ln\frac{\sqrt{s^2+1}}{s+1} + \theta_0\right) = \frac{\pi}{2}.$$

[채점기준]

(a) 부분분수로 바꿀 수 있으면 4점

(b) $\tan\theta$로 치환하여 적분할 수 있으면 8점

(c) 계산이 정확하면 12점

[채점소감] 많은 학생들이 적분계산에 익숙치 않은 것 같다. 부분분수로 바꾸어 적분하는 기술을 모르는 학생들이 꽤 있었고, 특히 $\tan\theta$로 치환하여 적분하는 방법을 모르는 학생이 아주 많았다. 그리고 극한을 취하는 과정에서 실수를 범한 경우도 많았다.

8. (서술형) 조건 $a^2 + b^2 = 1$을 만족시키는 실수 a, b에 대하여 행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$가 나타내는 일차변환을 f라고 하자. 이 때 반지름이 r, 중심의 좌표가 (p, q)인 원이 f에 의하여 옮겨진 도형의 방정식을 구하여라.

[풀이] 옮겨진 점의 좌표를 (x', y')이라 두면

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

이다. 따라서

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$ 에 $x = ax' + by'$ 과 $y = bx' - ay'$ 을 대입한다. 따라서

$$(ax' + by' - p)^2 + (bx' - ay' - q)^2 = r^2.$$

즉

$$(x - ap - bq)^2 + (y - bp + aq)^2 = r^2.$$

[채점기준]

(a) (x, y)를 (x', y')에 대한 식으로 잘 정리하면 4점

(b) (x, y)를 원래 식에 치환하여 (x', y')에 대한 식을 제대로 계산해야 12점

[**채점소감**] 고등학교 과정을 충실히 이수한 학생이라면 쉽게 풀수 있는 문제로 사료된다. 하지만 일차변환의 개념을 충분히 이해하지 못하는 학생들이 의외로 많은 것 같아 안타까웠다. 특히 일차변환에 의해 원이 원으로 옮겨진다고 착각하는 학생들이 많았다. 이 문제에서는 주어진 일차변환이 대칭이동과 회전이동의 합성으로 주어지기 때문에 원을 원으로 보내지만 일반적으로는 그렇지 않다.