2003년 수학 성취도 측정시험 풀이/채점기준/채점소감

단답형은 답만쓰고, 주관식은 답과 함께 풀이의 과정을 간단 명료하게 쓰시오. 1번부터 6번은 단답형이고, 7번부터 13번 까지는 서술형입니다.

1. 함수 $g(x)$ 가 $g(0) = 0,\ g'(0) = 3$ 을 만족하고, $f(x) = g(e^x g(x))$ 라 할 때, $f'(0)$ 의 값은 $\boxed{}$ 이다.

[풀이]

연쇄법칙을 이용하여 계산하면 $f'(x) = g'(e^x g(x))\{e^x g(x) + e^x g'(x)\}$ 이므로 $f'(0) = 3 \cdot 3 = 9$ 이다.

2. 미분가능함수 $f(x)$ 가 $f(0) = 0,\ f(2) = 2,\ f'(x) > 0$ 을 만족하고, f 의 역함수를 g 라 하자. 만일 $\int_0^2 f(x)dx = 1$ 이면 $\int_0^2 g(y)dy$ 의 값은 $\boxed{}$ 이다.

[풀이]

먼저 적분값

$$\int_0^2 f(x)dx + \int_0^2 g(y)dy$$

를 구해보도록 하자. 두번째 항에서 $g(y) = x$ 로 치환을 하면, $f(x) = y$ 로 부터 $f'(x)dx = dy$ 를 얻는다. $f(0) = 0, f(2) = 2$ 이므로 다음을 얻을 수 있다.

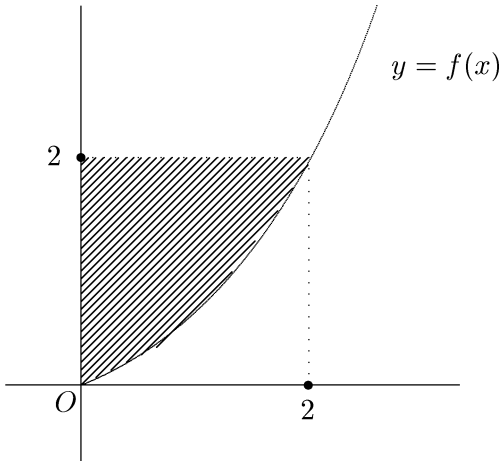
$$\int_0^2 f(x)dx + \int_0^2 xf'(x)dx = \int_0^2 (xf(x))'dx = 2f(2) - 0f(0) = 4$$

따라서 구하는 값은 3 이다.

[별해]

구하는 적분값은 빗금친 부분의 넓이이므로

$$\int_0^2 g(y)dy = 4 - \int_0^2 f(x)dx = 4 - 1 = 3$$



3. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x = e^{-4}$ 인 실수 a 의 값은 $\boxed{}$ 이다.

[풀이]

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{2a}}\right]^{\frac{2ax}{x-a}} = e^{2a}$$

따라서 $a = -2$ 이다.

4. 극한값 $\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^2-1}\int_1^{x^2} e^{-t^2}dt$ 는 $\boxed{}$ 이다.

[풀이]

$F(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt$ 라 두면

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^2-1}\int_1^{x^2} e^{-t^2}dt = \lim_{x\to 1}\frac{F(x^2)-F(1)}{x^2-1} = F'(1) = e^{-1}$$

5. 적분값 $\int_1^e (\ln x)^2 dx$ 는 $\boxed{}$ 이다.

[풀이]

부분적분법을 이용하여 부정적분하면

$$\int (\ln x)^2 dx = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + C$$

이다. 따라서 $\int_1^e (\ln x)^2 dx = e - 2$ 이다.

6. 공간에 있는 선분을 xy 평면, yz 평면, zx 평면에 정사영시킨 선분의 길이가 각각 a, b, c 일 때, 공간에 있는 선분의 길이는 $\boxed{}$ 이다.

[풀이]

공간상에 있는 선분을 평행이동하여 한쪽 끝이 원점에 있다고 가정해도 된다. 다른 쪽의 좌표를 (x, y, z) 라고 하면 xy 평면에 좌표를 사영하면 $(x, y, 0)$ 이 되고, 따라서 $x^2 + y^2 = a^2$ 이 된다. 마찬가지로 $y^2 + z^2 = b^2, z^2 + x^2 = c^2$ 이므로 구하고자 하는 선분의 길이는 $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{2}}$ 가 된다.

7. (1) 중간값정리를 써라.

[풀이]

(중간값 정리)
함수 $f(x)$ 가 폐구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$ 일때, $f(a)$ 와 $f(b)$ 사이의 값을 k 가 주어지면, $f(c) = k$ 인 c 가 개구간 (a, b) 안에 적어도 하나 존재한다.

[채점기준]

(a) 정리를 정확히 기술하지 않은 경우 모두 0점.

(2) 방정식 $x + \cos x - \sin x = 0$ 의 실근의 개수를 조사하여라.

[풀이]

먼저 $f(x) = x + \cos x - \sin x$ 로 두자. 그러면

$$\begin{aligned} f(x) &= x + \cos x - \sin x \\ &= x + \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

그러므로

$$\begin{array}{lll} x < -\sqrt{2} & \text{이면} & f(x) < 0 \\ x > \sqrt{2} & \text{이면} & f(x) > 0 \end{array}$$

그리고 중간값 정리에 의해 $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ 사이에 $f(x) = 0$ 이 되는 x 가 적어도 하나 존재한다. 이제 함수를 미분하여 극값을 구하고 증감표를 그려서 $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$사이에서 근이 몇개가 존재하는지를 알아보자.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \sin x - \cos x \\ &= 1 - \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

이므로 극점의 x 좌표는 $x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}$ 이고 증감표는 다음과 같다.

x	$-\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0
$f(x)$	$-\frac{3}{2}\pi - 1$	$\nearrow$		$\nearrow$	1	$\searrow$		$\searrow$	$\frac{\pi}{2} - 1$

이로부터 폐구간 $[-\sqrt{2}, 0]$ 사이에 근이 오직 한개 존재함을 알 수 있다.

[채점기준]

(a) $x < -\sqrt{2}, \;\; x > \sqrt{2}$ 에서 근이 없다는 것을 보이면 1점.
(b) $f(x) = x + \cos x - \sin x$ 의 도함수를 맞게 구하면 2점.
(c) 증감표를 이용하여 그래프의 개형을 그려서 근이 한 개 존재함을 보이면 2점.

[채점소감]

7(1)의 경우 많은 학생들이 롤의 정리, 평균값 정리등을 중간값 정리로 혼동하여 쓴 경우가 대부분이었다. 또한 정리의 기본이 되는 조건들 심지어 결론까지도 제대로 서술하지 못했다. 이로 미루어 보아 내용을 이해하지 못하고 그냥 단순암기를 했다는 인상을 떨칠 수 없었다. (2)번의 경우 역시 직관적으로 함수를 두 부분으로 나누어 두 그래프의 교점의 갯수를 세 보려는 시도가 꽤 많았다. 이 경우는 교점이 하나밖에 없다는 증명의 시도없이 단순히 직관에 의지해 그림만으로 주장하고 있었다. 또한 역시 학생들이 채점자에게 자신의 답안을 잘 전달하는 법이 서툴다는 것을 느꼈다.

8. 무한급수 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|e^{-x}\sin x|dx$ 의 값을 구하여라.

[풀이]

$$\begin{aligned}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}\sin x dx &= \left[-\frac{1}{2}e^{-x}(\cos x+\sin x)\right]_{n\pi}^{(n+1)\pi} \qquad (1)\\ &= (-1)^n\frac{1}{2}(e^{-n\pi}+e^{-(n+1)\pi})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|e^{-x}\sin x|dx &= \begin{cases}\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}\sin x dx, & n \text{ 이 짝수}\\ \displaystyle -\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}\sin x dx, & n \text{ 이 홀수}\end{cases}\\ &= \frac{1}{2}(e^{-n\pi}+e^{-(n+1)\pi})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{k}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|e^{-x}\sin x|dx\\ =\ &\frac{1}{2}\lim_{k\to\infty}\left(1+2e^{-\pi}+2e^{-2\pi}+\cdots+2e^{-k\pi}+e^{-(k+1)\pi}\right) \qquad (2)\\ =\ &\frac{1+e^{-\pi}}{2(1-e^{-\pi})} \qquad (3)\end{aligned}$$

[채점기준]

(a) (1)까지 맞으면 5점.
(b) (2)까지 맞으면 8점.
(c) (3)까지 맞으면 10점.

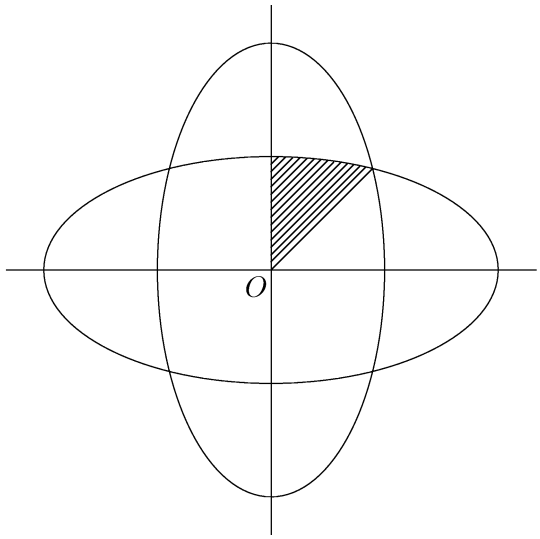
[채점소감]

이 문제는 부분적분과 무한급수의 합에 대한 것인데, 정확히 푼 학생들이 별로 없었다. 상당수의 학생들이 부분적분을 이용하여 푼다는 것을 알고 있으나, 적분과정에서 적분을 제대로 하지 못하거나 절대값이 있는 적분은 n 이 홀수냐 짝수냐에 따라 부호가 달라지는 것을 인지하지 못하였다. 또한 적분의 결과를 이용하여 급수의 합을 구하는 과정에서도 정확히 그 합을 구해보지 않고 n 에 따라 적분값이 반대가 될것이라는 추측으로 답을 구하는 경우가 많았다. 자신의 답에 대한 구체적인 이유나 계산 과정을 언급하지 않고 결론을 내리는 경우도 있었다. 자신의 생각을 논리적으로 정리하여 정확한 답을 작성하는 방법을 익히는 것이 필요할 것 같다.

9. 두 타원 $\dfrac{x^2}{3}+y^2=1,\ x^2+\dfrac{y^2}{3}=1$ 의 내부의 공통부분의 넓이를 구하여라.

[풀이]

두 타원의 교점의 좌표는 $\left(\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2},\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 이다. 따라서 빗금친 부분의 넓이를 구해서 8 배를 하면 구하는 넓이가 된다.



빗금친 부분의 넓이는

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-\frac{x^2}{3}}dx - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

이다. 여기서 $x=\sqrt{3}\sin\theta$ 로 치환하면 $dx=\sqrt{3}\cos\theta d\theta$ 이다. 따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned}
8\left(\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-\frac{x^2}{3}}dx - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) &= 8\left(\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{3}\cos^2\theta d\theta - \frac{3}{8}\right) \\
&= 8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{6}} - 3 \\
&= 4\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right) - 3 \\
&= \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi
\end{aligned}$$

[채점기준]

(a) 적분식까지 바르게 세웠으면 5점. (다양한 방법이 있음)
(b) 식을 세우지 못하고 구하는 방법만 기술했거나 틀린 적분식, 또는 두 타원이 만나는 교점을 잘못구했으면 0점.

(c) 적분식을 맞게 세우고 정답까지 맞으면 10점.

[채점소감]

적분을 이용하여 넓이를 구하는 문제이다. 이 문제를 풀려면 그림을 제대로 이해하고 그 넓이를 구하기 위한 적절한 함수와 구간을 잘 찾아야 할 것이다. 학생들의 답안을 보며 다양한 방법의 풀이를 볼 수 있었다. 물론 어떠한 함수를 어떠한 구간에서 적분해야 하는지 전혀 모르는 학생들도 있었지만 대부분의 학생들이 적분을 이용해서 문제를 풀려고 시도를 했고, 적분식까지 맞게 쓴 경우도 많았다. 그런데 실제로 적분을 못하는 경우가 허다했다. 삼각함수로 치환해서 풀 수 있는 그리 어렵지 않은 문제였음에도 불구하고 실수라고 볼 수 없는 엉뚱한 적분의 결과를 내거나 식까지만 쓴 경우가 많았다. 정상적인 고교과정을 이수했다면 누구나 풀 수 있는 문제라고 생각한다. 대학에서 공대나 자연대를 지원하는 학생이라면 당연히 풀 수 있어야 하는 문제이지만 풀지 못하는 학생이 많은 것을 보고 전체적으로 학력이 저하되었음을 현저히 느낄 수 있었다.

10. 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 모든 x 에 대하여 $|f'(x)| \leq 1$ 을 만족한다. 만일 $f(1) = 1,\ f(-1) = -1$ 이면, 모든 $x \in [-1, 1]$ 에 대하여 $f(x) = x$ 임을 보여라.

[풀이]

구간 $[-1, 1]$ 에서 $f(x) \neq x$ 라고 가정하자. 구간 $[-1, 1]$ 의 점 t 가 있어서 $f(t) > t$ 라 하면 평균값 정리에 의하여

$$f'(t_0) = \frac{f(t) - (-1)}{t - (-1)} > 1$$

를 만족하는 점 t_0 가 개구간 $(-1, t)$ 안에 존재한다. 이것은 가정에 모순이다. 마찬가지로 $f(t) < t$ 인 점 t 가 존재하여도 위와 같이 모순을 얻을 수 있으므로 모든 $x \in [-1, 1]$ 에 대하여, $f(x) = x$ 이다.

[별해] 만일 $g(x) = f(x) - x$ 라 놓으면, 조건에 의하여 $g'(x) = f'(x) - 1 \leq 0$ 를 만족하고 $g(x)$ 가 감소함수임을 알 수 있다. 그런데 $g(-1) = g(1) = 0$ 이므로 $g(x)$ 가 구간 $[-1, 1]$ 에서 상수함수 0 임을 알 수 있다. 따라서 $g(x) = 0$ 을 얻고, 따라서 모든 $x \in [-1, 1]$ 에 대하여, $f(x) = x$

이다.

[채점기준]

(a) 그래프를 사용하거나 직관을 이용한 엉성한 풀이는 모두 0점. 예컨데, 미분계수의 평균값이 1 이므로 1 보다 작아지는 미분계수가 있으면 반드시 1 보다 큰 미분계수를 가지는 점이 있다든지, 그래프가 오목이거나 볼록이면 안 된다는 직관적인 풀이는 답으로 간주하지 않았다.
(b) 풀이과정은 맞았으나, 특별한 점들에 대해서만 증명한 경우, 또한 당연히 배우지 않았을 사실들을 아무 설명없이 사용한 경우 등에는 5점 감점.

[채점소감]

이 문제는 결국 "평균값 정리"의 개념을 얼마나 정확히 알고 있는가를 묻고 있는 문제였다. 채점기준대로 채점한 결과 0점자가 다수 속출한 것으로 보아 학생들의 실력이 많이 저하되었다고 생각된다. 평균값 정리를 써서 문제를 해결하려는 학생들은 많았으나, 마치 암기 위주의 수학 교육을 받은 것 같은 느낌을 강하게 주었다. 공식만 써 놓고 그 속에 숨어있는 평균변화율과 순간변화률의 관계를 파악하지 못한 학생이 의외로 많았던 것 같다. 또한 답안지를 작성할 때, 논리적이지 않고, 애매모호하게(몇몇 경우는 상당히 해석이 곤란할 만큼) 써 놓는 경우가 더러 있었다. 앞으로 꾸준히 노력해서 서술형 답안지를 논리적으로 쓰는 능력을 길러야 하겠다.

11. 행렬 $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 로 나타나는 일차변환 f 에 대하여 (단, $\theta > 0$)

$$f^2 = f \circ f, \quad f^3 = f \circ f^2, \quad f^4 = f \circ f^3, \cdots, \quad f^{2003} = f \circ f^{2002}$$

라 정의하자. 일차변환 f^{2003} 이 x 축 상의 모든 점들을 x 축 상의 점으로 보내는 일차변환이라고 할 때, θ 의 최소값을 구하여라.

[풀이]

우선

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \cos(\theta + \frac{\pi}{4}) & \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) \\ -\sin(\theta + \frac{\pi}{4}) & \cos(\theta + \frac{\pi}{4}) \end{pmatrix}$$

이므로 f 는 $\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right)$ 만큼 회전하고 $\sqrt{2}$ 만큼 확대하는 변환이다. 따라서 f^{2003} 은 $2003\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$ 만큼 회전하고 $\sqrt{2}^{2003}$ 만큼 확대하는 변환이므로, 이 변환이 x 축상의 모든 점들을 x 축상의 점들로 보내려면

$$2003\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = n\pi, \;\; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (*)$$

을 만족하면 된다. 이를 만족하는 최소의 양수 θ 는 $n = 501$ 일 때 $\theta = \dfrac{\pi}{8012}$ 이다.

[채점기준]

(a) $(*)$식에서 $2003\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = 2n\pi$ 로 푼 경우 5점. 이때 최소의 양수 θ 값이 틀리면 3점.
(b) $(*)$식에서 $2003\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right) = n\pi$로 θ 를 구하는 과정에서 n 을 제대로 고려하지 않은 경우는 5점 감점, n 을 고려하였으나 계산 착오인 경우는 2점 감점.
(c) 미세한 실수는 1점 감점.

[채점소감]

이 문제의 출제 의도는 주어진 특수한 일차변환 f 를 회전변환으로 이해할 수 있는가이다. 제대로 이해해야만 비로소 f^{2003} 을 계산할 수 있다. 또한 일반각에 대한 올바른 이해가 있어야만 원하는 답을 얻을수 있다. 상당수의 학생들이 아예 풀지 못했다. 그리고 나머지 푼 학생들의 상당수도 논리적이고 명쾌한 풀이를 하지 못했다. 자신이 아는 문제라 할지라도 남에게 얼마나 논리적으로 설명할 수 있는가는 점수와 직결되는 중요한 문제이다. 덧붙여 문제를 풀때 주어진 조건은 무엇이며 무엇을 구하는 문제인지를 먼저 파악했으면 하는 아쉬움이 남는다.

12. xyz 공간에 반지름 1 인 세 개의 구 S_1, S_2, S_3 가 놓여 있다. 그 중심을 각각 $O_1(0,0,1)$, $O_2(2,0,1)$, $O_3(1,\sqrt{3},1)$ 이라 하자. 반지름 1 인 또 다른 구 S_4 를 S_1, S_2, S_3 와 동시에 접하도록 S_1, S_2, S_3 위에 쌓아 올렸다.

(1) S_4 의 중심 O_4 의 좌표를 구하여라.

[풀이]

점 O_4 의 좌표를 (a,b,c) 라 하자.

$$\begin{aligned} a^2+b^2+(c-1)^2 &= 4 \\ (a-2)^2+b^2+(c-1)^2 &= 4 \\ (a-1)^2+(b-\sqrt{3})^2+(c-1)^2 &= 4 \end{aligned}$$

를 연립하여 풀면 $a=1$, $b=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $c=1+\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ 이다.

[별해]

삼각형 $O_1O_2O_3$ 의 중심의 좌표는 $\left(1,\dfrac{\sqrt{3}}{3},1\right)$ 이다. 한변의 길이가 a 인 정사면체의 높이는 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$ 이고 사면체 $O_1O_2O_3O_4$ 는 모서리의 길이가 2 인 정사면체이므로 정사면체 $O_1O_2O_3O_4$ 의 높이 $h=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ 이다. O_4 의 x 좌표와 y 좌표는 삼각형 $O_1O_2O_3$ 의 무게중심의 x 좌표, y 좌표와 같고 O_4 의 z 좌표는 $h+1$ 이므로 O_4 의 좌표는 $\left(1,\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{2\sqrt{6}}{3}+1\right)$ 이다.

[채점기준]

(a) (1)의 방정식의 식들이 맞고 답이 틀리면 3점.
(b) 풀이 방법(2)에서 정사면체의 길이 관계를 적절히 사용하여 z좌표를 제대로 구하지 못하면 3점.
(c) 계산실수가 있으면 2점 감점.

(2) S_1 과 S_4 의 접점을 T 라 할 때, 점 T 를 지나며 S_1 과 S_4 에 동시에 접하는 평면의 방정식을 구하여라.

[풀이]

점 T 의 좌표는 O_4 와 O_1 의 중점이므로 $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}+1\right)$ 이다.

한편, 구하는 평면의 법선벡터는 $\overrightarrow{O_1O_4}$ 와 일치하므로 $\left(1, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$ 이다. 따라서 구하는 평면의 방정식은

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{3}\left(y-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)+\frac{2\sqrt{6}}{3}\left(z-\left(\frac{\sqrt{6}}{3}+1\right)\right)=0$$

[채점기준]

(a) 법선벡터와 T 는 각각 1점.
(b) 평면의 방정식을 제대로 구하면 3점.
(c) 평면의 방정식에서 마지막에 $=0$ 을 붙이지 않으면 평면의 방정식에 해당하는 3점을 주지 않았음.

[채점소감]

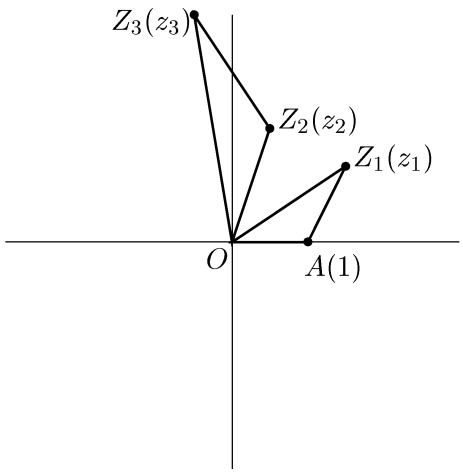
12.(1)에서 정사면체를 이용하여 푼 경우, 정사면체 내부의 변의 길이 관계를 제대로 이해하지 못한 학생이 많았다. 두점사이의 거리 공식을

$$\begin{aligned} a^2+b^2+(c-1)^2 &= 4 \\ (a-2)^2+b^2+(c-1)^2 &= 4 \\ (a-1)^2+(b-\sqrt{3})^2+(c-1)^2 &= 4 \end{aligned}$$

와 같이 써야하는데 $4=2^2$ (거리 제곱) 인데 2 (거리)로 쓴 학생들이 많았으며, 세개의 연립방정식을 계산하는 과정에서 오류도 많이 보였다. 12.(2)에서는 문제를 제대로 이해하지 못하고 직선의 방정식을 구한 학생들도 있었고, T 와 O_1, O_4 사이의 관계를 이해하지 못하고 문제에서 요구하는 평면이 아닌 O_1 을 지나는 평면을 구하는 경우도 있었다. 계산이 깔끔하지 못했으며, 따라

서 실수도 많이 발생했다. 전체적으로 답안을 잘 작성하는 연습이 부족하고, 계산 연습도 부족하다고 생각된다.

13. 복소평면 위에 세 복소수 z_1, z_2, z_3 를 나타내는 점 Z_1, Z_2, Z_3 가 아래 그림과 같이 주어져 있다.



(1) $z_3 = z_1 z_2$ 일 때, $\triangle OAZ_1$ 과 $\triangle OZ_2Z_3$ 는 닮음꼴임을 보여라. 단, O, A 는 각각 $0, 1$ 을 나타내는 점이다.

[풀이]

$$\begin{aligned} \angle AOZ_1 &= \arg\left(\frac{z_1 - 0}{1 - 0}\right) \\ \angle Z_2OZ_3 &= \arg\left(\frac{z_3 - 0}{z_2 - 0}\right) \end{aligned}$$

그러므로, $\angle AOZ_1 = \angle Z_2OZ_3 = \arg z_1$ 이다. 또한, $|z_3| = |z_1||z_2|$ 이므로 $\overline{OZ_3} : \overline{OZ_2} = \overline{OZ_1} : \overline{OA}$ 이다. 결국, 두 변의 길이의 비와 그 사이의 끼인각이 같으므로 $\triangle OZ_2Z_3$ 와 $\triangle OAZ_1$ 은 닮은꼴이다.

[채점기준]

(a) 복소수의 곱셈과 편각, 절대값과의 관계를 이해하고 이를 이용하였으면 5점.
(b) 그외 기호의 실수나 사소한 오기는 1점 감점.

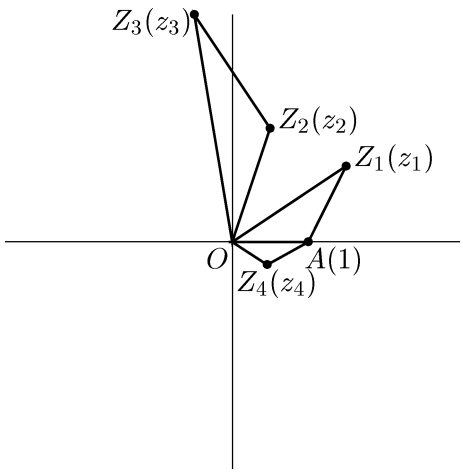
(2) $z_4 = \dfrac{1}{z_1}$ 로 정의된 복소수 z_4 를 나타내는 점 Z_4 를 평면 위에 도시하고, 그 이유를 설명하라.

[풀이]

극형식을 이용하여 $z_1 = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ 라 두면,

$$|z_4| = \left|\frac{1}{z_1}\right| = \frac{1}{r}, \qquad \arg z_4 = -\arg z_1 = -\theta$$

이다. 따라서 $z_4 = \dfrac{1}{r}(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$ 이고, 그 위치는 다음 그림과 같다.



[채점기준]

(a) z_4 의 편각과 절대값을 제대로 구하고 이 점을 명확히 도시한 경우 5점.
(b) 그 외 (1) 을 이용하여 닮음꼴을 만들어 구하여도 5점.
(c) $z_1 = a + bi$ 를 이용하여 z_4 의 좌표를 a, b 로 표시하면 0점.
(d) 그 밖에 사소한 오류의 경우 1점 감점.

[채점소감]

복소수의 곱에 대한 기본적인 개념만 알고 있더라도 풀 수 있는 쉬운 문제였는데도 불구하고 답안을 정확하게 작성한 학생들이 별로 없었다. 특히 (1)번 문제의 경우 직관적으로 자명해 보이는 나머지, 답안을 기술할 때 전혀 읽는 상대방을 의식하지 않고 자명한 몇가지 사실들만 나열한 채 증명을 마치는 경우가 많아 채점 순간 당황스러웠다. 답안을 작성할 때, 단지 틀린 말을 적지 않는 것만 중요한 것이 아니라, 무엇이 그 문제의 핵심인지를 잘 파악하는 것 또한 중요하다는 것을 강조하고 싶다. (2)번의 경우 문제에서 도시하라 하였음에도 불구하고 점을 표시하지 않은 학생들이 있어서 모두 0점으로 처리하였다.