2004 수학성취도평가시험

(2004학년도 정시 입학생)

2004 년 2 월 20 일

- 1번부터 6번은 단답형이고, 7번부터 13번은 서술형입니다.
- 단답형은 답만 쓰고, 서술형은 답과 함께 풀이 과정을 간단 명료하게 쓰시오.
- 각 문항의 배점은 단답형 5점, 서술형 10점입니다.

문제 1 방정식 $|x^2-1|-x=a$ 가 네 개의 서로 다른 실근을 가지는 실수 a 의 범위는 $\boxed{}$ 이다.

[풀이] 두 그래프 $y=|x^2-1|$ 과 $y=x+a$ 가 서로 다른 네 점에서 만나도록 a 의 범위를 정하면 된다. 곡선 $y=|x^2-1|$ 의 그래프를 그려보면 직선 $y=x+a$ 가 "곡선 $y=-x^2+1$ 과 접할 때"와 "점 $(-1,0)$ 을 지날 때"의 사이에 위치하면 된다는 것을 알 수 있다. 접할 때 a 의 값은 $a=\dfrac{5}{4}$ 이고, 점 $(-1,0)$ 을 지날 때 a 의 값은 $a=1$ 이므로, 구하는 실수 a 의 범위는 $1<a<\dfrac{5}{4}$ 이다.

문제 2 $x=0$ 에서 함수 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3+2x^2}}$ 의 이계미분계수 $f''(0)$ 의 값은 $\boxed{}$ 이다.

[풀이] 우선 $f(x)=(3+2x^2)^{-\frac{1}{2}}$ 이므로

$$f'(x)=-\frac{1}{2}(3+2x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 4x$$

이다. 따라서

$$f''(x)=\frac{3}{4}(3+2x^2)^{-\frac{5}{2}}\cdot(4x)^2-\frac{1}{2}(3+2x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 4$$

이고 $f''(0)=-\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$ 이다.

문제 3 극한 $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin x)^{\frac{1}{x}}$ 의 값은 $\boxed{}$ 이다.

[풀이] $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin x)^{\frac{1}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}}=\dfrac{1}{e}.$

[다른 풀이] 로그를 취한 뒤 극한을 계산하면

$$\lim_{x\to 0}\log(1-\sin x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\log(1-\sin x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-\cos x}{1-\sin x}}{1}=-1$$

이므로 $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin x)^{\frac{1}{x}}=e^{-1}$ 이다.

문제 4　타원 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 에 내접하는 직사각형의 최대넓이는 $\boxed{}$ 이다. (단, 직사각형의 각 변은 좌표축에 나란하다.)

[풀이] 타원과 직사각형이 제일상한에서 만나는 점의 좌표를 (s,t) 라 두면, 직사각형의 넓이는 $A=4st$ 이다. 따라서, 다음 부등식

$$1=\frac{s^2}{4}+\frac{t^2}{9}\geq 2\sqrt{\frac{s^2}{4}\cdot\frac{t^2}{9}}=\frac{st}{3}$$

에 의하여 $A\leq 12$ 임을 알 수 있고, $s=\dfrac{2}{\sqrt{2}}$, $t=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ 일 때 등호가 성립하므로 최대넓이는 12 이다.

문제 5　두 평면 $3x-y-2z+1=0$ 과 $2x-3y+z+3=0$ 이 이루는 각의 크기는 $\boxed{}$ 이다.

[풀이] 각 평면에 수직인 벡터는 각각 $(3,-1,-2)$, $(2,-3,1)$ 이고, 그 크기는 모두 $\sqrt{14}$ 이다. 두 벡터가 이루는 각을 θ 라 하면

$$(3,-1,-2)\cdot(2,-3,1)=\sqrt{14}\cdot\sqrt{14}\cdot\cos\theta$$

이다. 그러므로 $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ 이고 두 평면이 이루는 각의 크기는 $\dfrac{\pi}{3}$ 이다.

문제 6　한 변의 길이가 1 인 정팔면체에 내접하는 구의 부피는 $\boxed{}$ 이다.

[풀이] 정팔면체의 중심을 삼차원 좌표평면에서 원점으로 두면, 정팔면체의 한 면을 평면 $x+y+z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 로 둘 수 있다. 정팔면체에 접하는 구의 반지름 r 은 원점으로부터 위 평면에 이르는 거리이다. 따라서

$$r=\frac{\left|0+0+0-\frac{\sqrt{2}}{2}\right|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$$

이고 구의 부피는 $\dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)^3=\dfrac{\sqrt{6}}{27}\pi$ 이다.

문제 7 함수 $f(x) = 2xe^{2x}$ 에 대하여 다음 물음에 답하라.

(가) 극한값 $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ 와 $\lim_{x\to\infty} f(x)$ 를 구하여라.

(나) 함수 $y = f(x)$ 의 최소값을 구하여라.

(다) 함수 $y = f(x)$ 의 치역을 구하여라.

(라) 함수 $y = bxe^{bx}$ (단, $b > 0$ 는 상수) 의 최소값이 b 의 값에 관계없이 항상 일정함을 보여라.

[풀이]

(가) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{2x}{e^{-2x}} = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{2}{-2e^{-2x}} = 0, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$

(나) 함수 $y = f(x)$ 를 미분하면, $f'(x) = 2e^{2x}(1+2x)$ 이고 증감표는 다음과 같다.

x	$x < -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$x > -\frac{1}{2}$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

그러므로 $f(x)$ 는 $x = -\dfrac{1}{2}$ 일 때 최소값 $-\dfrac{1}{e}$ 를 가진다.

(다) (가), (나)에 의하여 구하는 치역은 $\{y : y \geq -\frac{1}{e}\}$ 이다.

(라) 함수 $y = f(x)$ 를 미분하면, $f'(x) = be^{bx}(bx+1)$ 이고 증감표는 다음과 같다.

x	$x < -\frac{1}{b}$	$-\frac{1}{b}$	$x > -\frac{1}{b}$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

따라서 $x = -\dfrac{1}{b}$ 에서 최소값을 가지고,

$$f(-\frac{1}{b}) = b(-\frac{1}{b})e^{b(-\frac{1}{b})} = -\frac{1}{e}$$

이므로 $y = f(x)$ 는 b 의 값에 관계없이 최소값 $-\dfrac{1}{e}$ 를 가진다.

[채점기준]

(가) $\lim_{x\to-\infty} f(x)$를 구하면 2점, $\lim_{x\to\infty} f(x)$를 구하면 1점.

(나) 미분해서 최소값을 정확히 찾으면 2점.

(다) 치역을 맞게 구하면 2점.

(라) $f'(x)$를 구하고 최소값까지 정확히 구하면 3점.

[채점소감] 전반적으로 학생들이 문제를 잘 풀었다. 그러나 그래프를 그리는 문제 (나), (다)에 상대적으로 취약하였다. (나)번 문제에서 증감을 고려하지 않고 단순히 미분계수가 0 인 점에서 함수값을 구한 경우가 많았고, (라) 번에서 답안의 결론을 적는 데 미숙하였다.

문제 8　미분가능한 함수 $y = f(x)$ 가 다음 성질

$$f(x+y) = f(x)f(y), \qquad f(0) = f'(0) = 1$$

을 만족할 때, 도함수 $f'(x)$ 를 구하여라.

[**풀이**] 미분계수의 정의와 주어진 함수가 만족하는 성질에 의하여 다음

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x)f(h)-f(x)}{h} \\ &= f(x)\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} \\ &= f(x)f'(0) = f(x) \end{aligned}$$

을 얻는다. 이 식을 이용하면 $\dfrac{d}{dx}\log|f(x)| = \dfrac{f'(x)}{f(x)} = 1$ 임을 알수 있다. 따라서, $\log|f(x)| = x + C$ 이고 $f(0) = 1$ 이므로 $C = 0$ 이다. 따라서 $f(x) = e^x$ 이고 $f'(x) = e^x$ 이다.

[**다른 풀이**] 항등식 $f(x+y) = f(x)f(y)$ 를 x 에 관하여 미분하면

$$f'(x+y) = f'(x)f(y)$$

를 얻고, $x = 0$ 을 대입하면

$$f'(y) = f(y)$$

를 얻는다. 이하는 위 풀이와 같다.

[**채점기준**]

(1) $f'(x) = f(x)$ 를 구한 경우 5점.

(2) $f'(x)$ 를 구한경우 10점.

[**채점소감**] 관계식 $f(x+y) = f(x)f(y)$ 로부터 혹은 $f(x) = f'(x)$ 로부터 이것이 지수함수의 성질이므로 이를 만족하는 함수는 지수함수라고 서술한 학생이 대부분이었다. 이는 특성과 정의를 구분하지 못하거나 학생들이 고등학교 때 단순암기식으로 "이러한 성질을 지닌 것은 이러한 함수"라고 외웠기 때문에 발생한 현상으로 보인다.

문제 9 복소평면 위의 한 점 $z = 1+2i$ 에서 영역 $A = \{z : |z-1|+|z+1| \le |z-i|+|z+i|\}$ 까지의 최단거리를 구하여라.

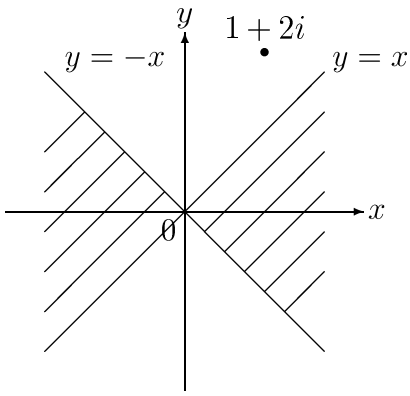
[**풀이**] $z = x + yi$ 라 두면, 준 부등식은

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2} + \sqrt{(x+1)^2+y^2} \le \sqrt{x^2+(y-1)^2} + \sqrt{x^2+(y+1)^2}$$

이 되고, 이 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2}\sqrt{(x+1)^2+y^2} \le \sqrt{x^2+(y-1)^2}\sqrt{x^2+(y+1)^2}$$

이 된다. 이를 다시 제곱하여 정리하면, $y^2 \le x^2$ 또는 $|y| \le |x|$ 를 얻고, 이를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



따라서, 점 $1+2i$ 에서 영역 A 까지의 최단거리는 점 $1+2i$ 에서 직선 $y = x$ 까지의 거리와 같고, 그 값은 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 이다.

[**참고**] 영역 A 는 점 1 과 -1 까지 거리의 합이 점 i, $-i$ 까지 거리의 합보다 작은 점들을 모아 놓은 영역이므로, 위 그림과 같다는 것을 바로 알 수 있다.

[**채점기준**]

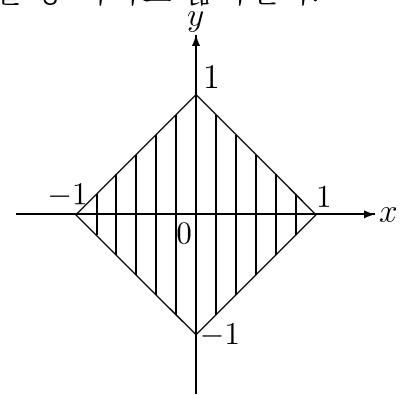
(1) A의 영역을 제대로 구하면 6점.

(2) 그래프를 제대로 그리고 답이 맞으면 10점.

[**채점소감**] 풀이과정 중 약간 복잡한 계산(제곱하여 정리하는 것을 두 번 해야 함)이 있는데, 많은 학생들이 계산을 시도조차 하지 못하고 있는 것으로 보아 조금이라도 복잡한 계산은 하기를 꺼려하는 것으로 보인다. 답안을 제시한 학생 중 대다수가 결과만을 제시하고 적절한 풀이과정을 제시하지 않았는데, 이는 학생들이 서술형 답안을 작성하는데에 익숙하지 않음을 반영하는 것으로 판단된다. 성급한 판단일 수도 있으나, 현재 대부분의 중·고등학교 수학 학습이 유형화된 문제 풀이들 통한 답안 찾기에 한정되어 있어, 수학적인 개념을 통한 논리적 사고 훈련 등 보다 중요한 것들이 뒷전으로 밀리고 있는 것 같아 안타깝다.

문제 10 좌표평면 위의 정사각형 $R = \{(x, y) : |x| + |y| \le 1\}$ 을 생각하자. 정사각형 R 을 자기 자신으로 옮기는 일차변환을 모두 찾고, 이것들을 2×2 행렬로 표시하여라.

[**풀이**] 아래와 같이 주어진 도형에서 $(1, 0)$ 과 $(0, 1)$ 을 잇는 선분은 일차변환에 의해 도형의 경계를 이루는 선분들 중 하나로 옮겨진다.



$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ 이므로, $\{(a, c), (b, d)\}$ 는 다음

$$\{(1,0),(0,1)\}, \qquad \{(1,0),(0,-1)\}, \qquad \{(0,-1),(-1,0)\}, \qquad \{(-1,0),(0,1)\}$$

중 하나이다. 따라서 우리가 구하는 행렬은

$$\pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \pm\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \pm\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

뿐이다.

[**채점기준**]

(1) 8개의 행렬을 모두 구한 경우 5점.

(2) 8개뿐인 이유를 밝힌 경우 10점.

[**채점소감**] 학생들은 직관적으로 어떤 변환들이 답이 되어야 하는지 알고 있었다. 하지만 어려운 계산을 요하는 문제가 아님에도 왜 그런 변환들 밖에 존재하지 않는지 논리적으로 설명하지 못했다. 문제에서 요구하는 것을 서술하는 연습이 부족한 학생들에게 좋은 경험이 될 수 있었으리라 생각한다.

문제 11　함수 $f(x)=\int_0^{\pi}|x-\sin t|\,dt$ 의 최소값을 구하여라.

[**풀이**] 함수 $f(x)$ 는 $x\le 0$ 에서 감소하고, $x\ge 1$ 에서 증가하므로 $f(x)$ 는 $0\le x\le 1$ 에서 최소값을 가진다. 따라서 구간 $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ 위에서 함수 $g(\theta)=f(\sin\theta)$ 의 최소값을 구하면 된다. 그런데

$$\begin{aligned} g(\theta) &= 2\left\{\int_0^{\theta}(\sin\theta-\sin t)dt+\int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}}(\sin t-\sin\theta)dt\right\} \\ &= 4\theta\sin\theta+4\cos\theta-\pi\sin\theta-2 \end{aligned}$$

이고 $g'(\theta)=(4\theta-\pi)\cos\theta$ 이므로, 여기서 $g'(\theta)=0$ 이 되는 θ 의 값은 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 이다. 이제, $\theta=0,\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2}$ 에서 $g(\theta)$ 의 값을 비교하면 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 일 때 최소값 $2\sqrt{2}-2$ 를 가진다는 것을 알 수 있다.

[**채점기준**]

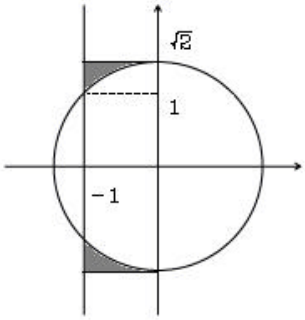
(1) 적분 안의 절대값을 풀어내고 적분을 하면 5점.

(2) 사소한 계산 실수 2점 감점.

[**채점소감**] 우선 대부분의 학생이 0점을 받았다. 그냥 백지로 낸 답안지가 대부분이었고, 전혀 다른 방향의 풀이도 많았다. 많은 학생들이 $x\ge\sin t$ 와 $x<\sin t$ 의 두 경우로 나누어 문제를 해결하고 시도했지만 그 뒤 계산을 정확하게 해내는 경우는 드물었다. 미분과 적분, 절대값을 다루는 요령, 그리고 최대최소를 구하는 기본적인 지식만 가지고 풀릴 문제는 아니라고 본다. 가지고 있는 지식을 응용해야하는데, 수학능력시험이 쉬워지면서 쉬운 문제만을 기계적으로 풀어온 학생들이었기에 그리 어렵지 않은 응용문제임에도 점수가 상당히 낮았다. 그리고 답안을 작성하는 요령도 대학에 입학한 후 더 많이 연습해야할 것으로 보인다. 고교 재학 시절 수학 답안을 서술형으로 작성하는 기회가 많지 않았기 때문이라 여겨진다. 물론 답안 작성이 완벽한 경우도 있었고 모범답안과 다른 방법으로 맞게 푼 학생들도 있었다.

문제 12　좌표평면의 영역 $\{(x,y) : x^2+y^2 \le 2\}$ 를 직선 $x=-1$ 둘레로 회전시킨 입체의 부피를 구하여라.

[**풀이**] 구하는 입체의 부피는 아래 그림에서 반원을 회전해서 생기는 회전체의 부피에서 색칠한 부분을 회전한 부피를 빼내야 한다.



따라서 구하는 부피는 다음과 같은 적분식으로 주어진다.

$$\begin{aligned} V &= 2\pi\left\{\int_0^{\sqrt{2}}\left(1+\sqrt{2-y^2}\right)^2 dy - \int_1^{\sqrt{2}}\left(1-\sqrt{2-y^2}\right)^2 dy\right\} \\ &= 2\pi\left\{\int_0^{1}\left(3-y^2\right) dy + 2\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{2-y^2}\,dy + 2\int_1^{\sqrt{2}}\sqrt{2-y^2}\,dy\right\} \end{aligned}$$

여기서 적분값 $2\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{2-y^2}\,dy$ 는 문제에서 주어진 원의 반원의 넓이와 같고, 적분값 $2\int_1^{\sqrt{2}}\sqrt{2-y^2}\,dy$ 는 원 $x^2+y^2=2$ 가 $x=1$ 로 잘린 오른쪽 부분의 넓이와 같다. 따라서 구하는 회전체의 부피는

$$V = 2\pi\left\{\frac{8}{3}+\pi+\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\right\} = 3\pi^2+\frac{10}{3}\pi$$

이다.

[**채점기준**]

(1) 부피를 구하는 적분식을 정확히 구한 경우 5점.

(2) 적분값을 정확히 구한 경우 10점.

[**채점소감**] 회전체의 부피를 어떻게 구해야 하는지 모르는 학생들도 많았고, 문제에 맞는 적분식을 알고도 적분을 계산하지 못하는 경우도 많이 있었다. 또한 침착하게 계산하지 못하고 조그마한 부주의로 틀리는 학생이 많았다.

문제 13　두 곡선 $y=\cos nx$, $y=\sin nx$ 와 두 직선 $x=0,\ x=2\pi$ 로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하여라. (단, n 은 자연수)

[**풀이**] 함수 $y=\cos nx$ 와 $y=\sin nx$ 의 주기는 모두 $\dfrac{2\pi}{n}$ 이다. 그리고 구간 $0\le x\le \dfrac{2\pi}{n}$ 위에서 곡선 $y=\cos nx$ 와 $y=\sin nx$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는 다음

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{2\pi}{n}} |\cos nx-\sin nx|\,dx\\
=\ &\int_0^{\frac{\pi}{4n}}(\cos nx-\sin nx)\,dx+\int_{\frac{\pi}{4n}}^{\frac{5\pi}{4n}}(\sin nx-\cos nx)\,dx+\int_{\frac{5\pi}{4n}}^{\frac{2\pi}{n}}(\cos nx-\sin nx)\,dx\\
=\ &\left[\frac{1}{n}\sin nx+\frac{1}{n}\cos nx\right]_0^{\frac{\pi}{4n}}+\left[-\frac{1}{n}\cos nx-\frac{1}{n}\sin nx\right]_{\frac{\pi}{4n}}^{\frac{5\pi}{4n}}+\left[\frac{1}{n}\sin nx+\frac{1}{n}\cos nx\right]_{\frac{5\pi}{4n}}^{\frac{2\pi}{n}}\\
=\ &\frac{\sqrt{2}}{n}-\frac{1}{n}+\frac{2\sqrt{2}}{n}+\frac{\sqrt{2}}{n}+\frac{1}{n}=\frac{4\sqrt{2}}{n}
\end{aligned}$$

과 같다. 따라서 구하는 넓이는 $\dfrac{4\sqrt{2}}{n}\times n=4\sqrt{2}$ 가 된다.

[**채점기준**]

(1) 식을 정확히 세운 경우 5점

(2) 답까지 정확히 구한 경우 10점

[**채점소감**] 전체적으로 상당수의 학생들이 문제를 정확히 풀었다. 그러나 일부 학생들은 면적의 극한을 구하려고 하는 등 문제의 뜻을 제대로 이해하지 못하는 경우가 있었다. 또한 $n=1$ 이라고 마음대로 가정하고 문제를 풀려고 한 경우도 더러 있었다. 어떤 학생들은 수학적 귀납법으로 문제를 풀려고 시도하였는데 이는 수학적 귀납법의 원리를 제대로 알지 못했기 때문이다.