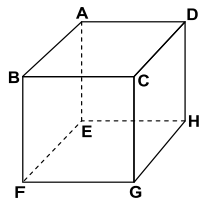
2005 수학성취도평가시험

(2005학년도 정시 입학생)

2005 년 2월 21일

- 1번부터 6번은 단답형이고, 7번부터 12번은 서술형입니다.
- 단답형은 답만 쓰고, 서술형은 답과 함께 풀이 과정을 간단 명료하게 쓰시오.
- 각 문항의 배점은 단답형 5점, 서술형 7번~10번 10점, 서술형 11번~12번 15점입니다.

문제 1 그림과 같은 정육면체에서, 벡터 $\overrightarrow{AG} = \square\,\overrightarrow{AB} + \square\,\overrightarrow{FH} + \square\,\overrightarrow{HD}$ 이다.



[풀이] 벡터 $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HG}$ 인데, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{FH}$, $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{AB}$ 이므로 벡터 $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FH} - \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FH} - \overrightarrow{HD}$ 이다.

문제 2 극한값 $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^3}{n^4} = \square$ 이다.

[풀이] 극한을 적분으로 바꾸는 공식(구분구적법)에 의하여

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^3}{n^4} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^3}{n^3} = \int_0^1 x^3 dt = \frac{1}{4}$$

이다.

문제 3 정적분 $\int_0^{\pi/2} \cos x \cos 2x \cos 3x \, dx = \square$ 이다.

[풀이] 코사인 함수의 합과 차 공식을 이용하면

$$\cos x \cos 2x \cos 3x = \frac{1}{4}(\cos 6x + \cos 4x + \cos 2x + 1)$$

이므로

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos 2x \cos 3x dx &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 6x + \cos 4x + \cos 2x + 1) dx \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{6} \sin 6x + \frac{1}{4} \sin 4x + \frac{1}{2} \sin 2x + x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

이다.

문제 4 방정식 $\ln x = cx^2$ 이 오직 한 개의 실근을 갖도록 하는 양의 실수 c 는 $\boxed{}$ 이다.

[**풀이**] 두 곡선 $y = \ln x$ 와 $y = cx^2$ 이 만나는 점의 x 좌표를 a 라고 하면, y 좌표도 같아야 하므로 $\ln a = ca^2$ 이다. 또 두 곡선이 만나는 점에서 두 곡선의 접선의 기울기는 같아야 하므로 양변을 미분하여 그 기울기를 구하면, $\dfrac{1}{a} = 2ca$ 이다. 이 두 식을 연립하여 풀면 $c = \dfrac{1}{2e}$ 이다.

문제 5 곡선 $x^y = y^x$ 위의 점 $(2, 4)$ 에서 이 곡선에 접하는 직선의 기울기는 $\boxed{}$ 이다.

[**풀이**] 양변에 로그를 취하면 $y \ln x = x \ln y$ 이고 이 식을 음함수 미분법을 이용하여 미분하면

$$y' \ln x + \frac{y}{x} = \ln y + \frac{x}{y} y'$$

이다. 점 $(2, 4)$ 에서 접선의 기울기는 위 식에 $x = 2, y = 4$ 를 대입했을 때 y' 의 값이므로 $x = 2, y = 4$ 를 대입하면

$$y' \ln 2 + 2 = \ln 4 + \frac{1}{2} y'$$

이다. 따라서 $y' = \dfrac{\ln 4 - 2}{\ln 2 - \frac{1}{2}}$ 이다.

문제 6 실수 α 에 대하여, 함수 f 를 다음과 같이 정의하자.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0, \\ x^\alpha & x > 0. \end{cases}$$

이 때, $x = 0$ 에서 함수 f 가 연속일 필요충분조건은 $\boxed{}$ 이고, 미분가능일 필요충분조건은 $\boxed{}$ 이다.

[**풀이**] f 가 연속일 필요충분조건은 $\lim\limits_{x \to 0+} x^\alpha = 0$ 이므로 구하는 조건은 $\alpha > 0$ 이다. 또한 f 가 미분가능일 필요충분조건은 $\lim\limits_{x \to 0+} \alpha x^{\alpha - 1} = 0$ 이므로 구하는 조건은 $\alpha > 1$ 이다.

[**채점기준**] 둘 중에 하나만 맞으면 3점.

문제 7 함수 $f(x) = x^6 - 7x^4 + 11x^2 - 4$ 에 대하여 아래 물음에 답하라.

(가) 방정식 $f(x) = 0$ 이 여섯 개의 실근을 가짐을 보이라.

(나) 이 여섯 개의 실근의 제곱의 합을 구하라.

[**풀이**]

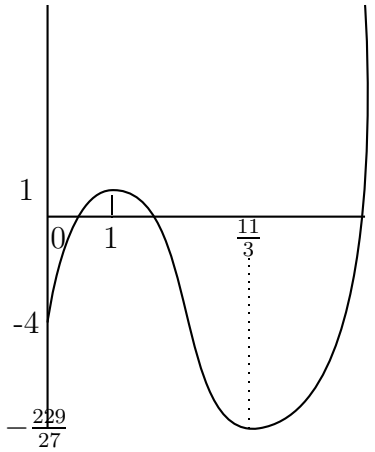
(가) $g(t) = t^3 - 7t^2 + 11t - 4$ 라 두면 $g(x^2) = f(x)$ 이다. $f(x) = 0$ 이 여섯 개의 실근을 가진다는 것을 보이기 위해 함수 $g(t) = 0$ 이 세 개의 양의 실근을 가진다는 것을 보이면 충분하다.

$$\begin{aligned} g'(t) &= 3t^2 - 14t + 11 \\ &= (3t - 11)(t - 1) \end{aligned}$$

이므로 함수 $g(t)$ 의 증감표를 만들면 아래와 같다.

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{11}{3}$	$\cdots$	∞
$g'(t)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(t)$	-4	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\frac{229}{27}$	$\nearrow$	

그러므로 $g(t)$ 의 그래프는 아래와 같다.



따라서 $g(t) = 0$ 은 세 개의 양의 실근을 가진다. 그러므로 방정식 $f(x) = 0$ 이 여섯 개의 실근을 가진다.

(나) 방정식 $g(t) = 0$ 의 세 개의 양의 실근을 α, β, γ 라고 놓자. 그러면 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha + \beta + \gamma = 7$ 이다. 그리고 $f(x) = 0$ 의 여섯 개의 실근은 $\pm\sqrt{\alpha}, \pm\sqrt{\beta}, \pm\sqrt{\gamma}$ 이므로, 구하는 답은 $2(\alpha + \beta + \gamma) = 14$ 이다.

[**채점기준**]

(가) 함수 $f'(x) = 0$ 또는 $g'(t) = 0$ 의 근을 정확히 구하면 2 점.

(나) 근과 계수의 관계까지만 정확히 구했거나 $g(t) = 0$ 의 근의 합에 2 배를 하지 않았을 때 3 점.

[**채점소감**] (가)의 경우 함수의 그래프를 좌표평면에 정확하게 그리지 못하는 학생이 많았다. 그리고 실근의 개수가 정확히 여섯 개임을 보여야 하는데, 해의 개수의 상한을 나타내주는 대수학의 기본정리를 이용하는 학생이 몇몇 있었다. 다수의 학생들이 고등학교 교과내용에서 이용되는 정리의 증명이나 응용에 소홀한 것 같아 아

쉬웠다. (나)에서는 일반적인 $n(\geq 3)$ 차 다항식에서 근과 계수의 관계를 파악하지 못하는 학생들이 많았다.

문제 8 좌표공간의 두 점 $A(0,1,2), B(-1,0,1)$ 을 잇는 선분 AB 를 평면 $2x-y+z=6$ 위로 정사영시킨 선분의 길이를 구하라.

[풀이] $\overrightarrow{AB}=\vec{v}$ 라 하자. 평면의 법선벡터 $\vec{n}$ 과 $\vec{v}$ 의 사이각 가운데 예각인 것을 θ 라 하면, $\cos\theta = |\frac{\vec{v}\cdot\vec{n}}{|\vec{v}||\vec{n}|}| = |\frac{-2+1-1}{|(-1,-1,-1)||(2,-1,1)|}| = \frac{\sqrt{2}}{3}$ 이다. 그러면 선분 AB 를 평면 위로 정사영한 선분의 길이는 $\overline{AB}\sin\theta = \sqrt{3}\cdot\sqrt{1^2-(\frac{\sqrt{2}}{3})^2} = \frac{\sqrt{21}}{3}$ 이다.

(다른 풀이) A, B 를 평면 위로 정사영한 점을 각각 A', B' 라 하면,

$$A' = A + t\vec{n} = (0,1,2) + t(2,-1,1) = (2t, -t+1, t+2)$$

$$B' = B + s\vec{n} = (-1,0,1) + s(2,-1,1) = (2s-1, -s, s+1)$$

이다. 그런데 A' 와 B' 은 모두 평면 위의 점이므로 평면의 방정식에 대입하면,

$$2\cdot 2t - (-t+1) + (t+2) = 6$$

$$2\cdot(2s-1) - (-s) + (s+1) = 6$$

이고, 이 방정식을 풀면, $t=\frac{5}{6}, s=\frac{7}{6}$ 이다. 그러므로 $A' = (\frac{5}{3}, \frac{1}{6}, \frac{17}{6}), B' = (\frac{4}{3}, -\frac{7}{6}, \frac{13}{6})$ 이고, 선분 $A'B'$ 의 길이는 $\frac{\sqrt{21}}{3}$ 이다.

[채점기준] 계산실수 5점.

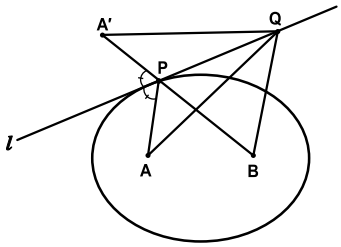
[채점소감] 전체적으로 대부분의 학생이 문제를 잘 풀었다. 그러나 평면의 법선벡터의 의미를 잘못알고 있는 경우, 내적 공식을 잘못 이용한 경우, 그리고 거리공식 등에서 사소한 실수 등으로 감점된 학생들이 생각보다 많았다.

문제 9 평면 위에 초점이 A, B 인 타원이 있다. 이 타원 위의 점 P 에서 두 벡터 $\overrightarrow{PA}$ 와 $-\overrightarrow{PB}$ 가 이루는 각을 이등분하는 직선은 타원에 접함을 증명하라.

[풀이] $\overrightarrow{PA}$ 와 $-\overrightarrow{PB}$ 가 이루는 각의 이등분선 l 에 대하여 점 A 를 대칭이동시킨 점을 A' 이라 하면, 점 A' 은 $\overrightarrow{BP}$ 의 연장선 위에 있다. 따라서 이등분선 l 위의 임의의 점 $Q\neq P$ 는 항상 다음 부등식

$$\overline{AQ}+\overline{BQ} = \overline{A'Q}+\overline{QB} > \overline{A'P}+\overline{PB} = \overline{AP}+\overline{BP}$$

을 만족하므로 타원의 정의(두 초점 A, B 로 부터 거리의 합이 일정한 점들의 모임)에 의하여 점 Q 는 타원 위의 점이 아니다. 즉, 타원과 이등분선 l 은 오직 한 점 P 에서 만나게 되어 l 은 접선이 된다.



(다른 풀이) 편의상 타원의 장축을 x 축이라 하자. 타원의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 이라 두고 P 의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면, $\overline{PA}+\overline{PB}=2a$ 가 된다. $\overrightarrow{PA}$ 와 $-\overrightarrow{PB}$ 가 이루는 각의 이등분선 l은 삼각형 PAB 의 외각의 이등분선이므로 l의 x 절편 C 는 $\overline{AB}$ 를 $\overline{PA}:\overline{PB}$ 로 외분하는 점이다. 따라서 C 의 x 좌표는

$$\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{a^2-b^2}\times\overline{PA}+\sqrt{a^2-b^2}\times\overline{PB}}{\overline{PA}-\overline{PB}}\\
=\ &\frac{\sqrt{a^2-b^2}\times(\overline{PA}+\overline{PB})}{\overline{PA}-\overline{PB}}\\
=\ &\frac{\sqrt{a^2-b^2}\times(\overline{PA}+\overline{PB})^2}{\overline{PA}^2-\overline{PB}^2}\\
=\ &\frac{\sqrt{a^2-b^2}\times 4a^2}{\sqrt{a^2-b^2}\times 4x_1}\\
=\ &\frac{a^2}{x_1}
\end{aligned}$$

이다. 그리고 점P 를 지나는 타원의 접선의 방정식은 $\dfrac{x_1x}{a^2}+\dfrac{y_1y}{b^2}=1$ 이고 이 직선의 x 절편 또한 $\dfrac{a^2}{x_1}$ 이다. 이 두 직선 모두 점 P 와 점 C 를 지나므로 같은 직선이다.

[**채점기준**] 1. 풀이에서 B' 의 존재를 증명하면 3 점.
2. 다른 풀이에서 점 C 의 존재를 언급하면 3 점.
3. 다른 풀이에서 점 C 를 제대로 구하면 5 점.
4. 계산 실수는 8 점.

[**채점소감**] 우선 거의 대부분의 학생이 0 점을 받았다. 그리고 많은 학생이 타원의 입사각과 반사각이 같다는 내용을 언급하였으나 문제와 같은 내용 (수학적 용어로 서로 동치관계이다.)이므로 점수를 받을 수 없었다. 언뜻 어려워보이는 문제일 수도 있으나 타원의 정의를 정확히 알고, 이를 조금만 응용하면 풀 수 있는 문제였는데 많은 학생이 풀지 못했다.

문제 10 함수 $f(x)=\dfrac{x}{(x+1)(x^2+1)}$ 에 대하여 다음 물음에 답하라.

(가) 도함수 $f'(x)$ 를 구하라.

(나) 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형을 도시하라.

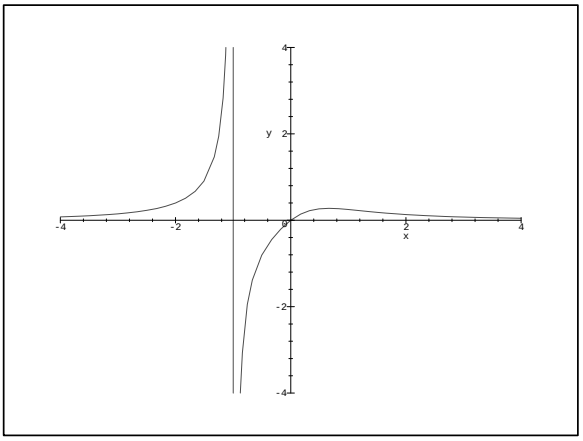
[풀이]

(가) 구하는 도함수는

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x+1)(x^2+1)-x\{x^2+1+2x(x+1)\}}{(x+1)^2(x^2+1)^2} \\ &= \frac{-2x^3-x^2+1}{(x+1)^2(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

이다.

(나) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ 이고, $x=-1$ 이 점근선이므로 $x=-1$ 에서의 극한값을 구하면 $\lim_{x\to-1^-} f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to-1^+} f(x)=-\infty$ 이다. 그리고 $f(x)=0$ 을 만족하는 x 는 0 밖에 없다. 또한 $f'(x)=0$ 을 만족하는 x 는 0 과 1 사이에 오직 하나 존재하며 이 점 전후의 부호를 고려하면 이 점이 유일한 극대값이 됨을 알 수 있다. 이 내용을 정리하면 다음과 같은 그래프를 그릴 수 있다.



[채점기준]

(가) 부분 점수는 없고 정답이 맞으면 5점.

(나) 1. 그래프 그리는 과정이 맞게 설명되어 있으면 3점.

2. 그래프까지 맞게 그리면 5점.

[채점소감] 도함수를 구하는 방법이 다양했다. 분수함수의 미분법을 이용하여 바로 미분하기도 하고, 부분 분수로 나누어 간단한 분수함수로 만든 다음에 미분하기도 하고, 혹은 로그를 취해서 미분한 다음 다시 로그를 떼어내기도 했으며, 원래의 분수함수를 두개의 분수함수가 곱해진 것으로 보아 곱의 미분으로 문제를 해결하기도 하였다. 이 문제를 틀린 학생 대부분은 미분으로 길어지는 식을 제대로 정리하지 못해서였다. 그리고 (나) 문제는 많은 학생들이 비워두거나 그래프를 완성하지 못하고 설명을 적다가 멈춘 답안지를 제출하였다.

문제 11 곡선 $y=(1-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$ (단, $0\le x\le 1$) 에 대해서 다음 물음에 답하라.

(가) 이 곡선의 길이를 구하라.

(나) 이 곡선과 x-축, y-축으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하라.

(다) 이 곡선 위의 점 $P(a,b)$ 에서 이 곡선에 접하는 직선이 x-축, y-축과 만나는 점을 각각 Q, R 이라 할 때, 선분 QR 의 길이가 1 임을 증명하라 (단, $0 < a < 1$).

[풀이]

(가) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\sqrt{1-x^{\frac{2}{3}}}}{x^{\frac{1}{3}}}$ 이므로 $1 + (\dfrac{dy}{dx})^2 = 1 + \dfrac{1-x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} = x^{-\frac{2}{3}}$ 이다. 따라서 곡선의 길이는

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx &= \int_0^1 x^{-\frac{1}{3}}dx \\ &= \left[\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\right]_0^1 \\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

이다.

(나) 구하는 영역의 넓이는 $\displaystyle\int_0^1 (1-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}dx$ 이다. 이 값을 계산하기 위해서 $x = \sin^3\theta$ 라고 치환하면

$$\begin{aligned}\int_0^1 (1-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sin^2\theta\cos^4\theta d\theta \\ &= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta\cos\theta)^2\cos^2\theta d\theta \\ &= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 2\theta}{4}\cdot\frac{\cos 2\theta+1}{2}d\theta \\ &= \frac{3}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 2\theta\cos 2\theta + \sin^2 2\theta)d\theta \\ &= \frac{1}{16}\left[\sin^3 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{3}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\theta d\theta \\ &= 0 + \frac{3}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 4\theta)d\theta \\ &= \frac{3}{16}\left[\theta - \frac{1}{4}\sin 4\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{3\pi}{32}\end{aligned}$$

이다.

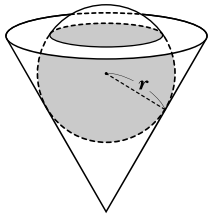
(다) $P(a,b)$ 에서의 접선의 방정식은 $y = -\dfrac{\sqrt{1-a^{\frac{2}{3}}}}{a^{\frac{1}{3}}}(x-a)+b$ 인데, $b = (1-a^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$ 이므로 $y = -\dfrac{\sqrt{1-a^{\frac{2}{3}}}}{a^{\frac{1}{3}}}(x-a) + (1-a^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$ 이다. 따라서 x 절편은 $a^{\frac{1}{3}}$, y 절편은 $\sqrt{1-a^{\frac{2}{3}}}$ 이 된다. 그러므로 선분 QR 의 길이는 $(a^{\frac{1}{3}})^2 + (\sqrt{1-a^{\frac{2}{3}}}\ )^2 = 1$ 이다.

[**채점기준**]

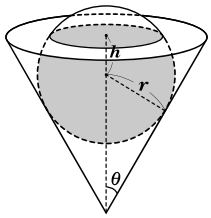
(가) 적분식까지 맞으면 3점, 답까지 맞으면 5점.
(나) 적분식까지 맞으면 2점, 답까지 맞으면 5점.
(다) 접선의 방정식을 맞게 구하면 2점, 답까지 맞으면 5점.

[**채점소감**] 먼저 (가)는 곡선의 길이를 구하는 문제인데, 대부분의 학생들이 잘 풀었다. 간혹 미분을 실수하는 학생들도 있었다. 그리고 (나)는 적분으로 넓이를 구하는 문제인데, 대부분의 학생이 이 문제를 풀지 못했다. 치환을 어떻게 할지 고민한 흔적도 보이고 치환을 한 후에도 계산이 복잡하여 포기한 것 같은 학생도 많았다. 마지막으로 (다)는 대부분의 학생들이 접선의 방정식은 맞게 구했다. 하지만 조금만 생각을 바꾸면 다양한 방법으로 선분 QR의 길이를 계산할 수 있는데 그 거리를 계산해내지 못했다. 참고로 이 문제를 창의적으로 보다 쉽게 풀어낸 학생들도 상당수 있었다. 익숙한 계산에 대해서는 능숙하게 잘하지만, 조금 복잡하고 낯선 계산이 나오면 너무 어렵게 느끼고 쉽게 포기하는 것 같았다.

문제 12 윗면의 반지름이 $\frac{2}{\sqrt{3}}$, 높이가 2 인 직원뿔 모양의 그릇에 물이 가득 들어 있다. 이 그릇에 반지름이 r 인 쇠구슬을 그림과 같이 담글 때, 흘러 넘치는 물의 양을 최대로 하는 r 의 값을 구하라.



[**풀이**] 흘러 넘치는 물의 양은 물 속에 잠기는 부분의 부피와 같으므로 물 속에 잠기는 부분의 부피를 최대로 하는 구의 반지름을 구하면 되는데, 구와 원뿔의 관계는 구의 반지름 r 의 값에 따라 세 가지 경우로 나누어 볼 수 있다.
(1) $r \le \dfrac{2}{3}$ 인 경우에는 구가 물 속에 완전히 잠기게 되고 이 때 물 속에 잠기는 부분의 부피는 $\dfrac{4}{3}\pi r^3$ 이며 r 이 증가함에 따라 증가한다. 따라서 $r = \dfrac{2}{3}$ 일 때 부피는 최대가 된다.
(2) $r \ge \dfrac{4}{3}$ 인 경우에는 구가 원뿔에 접하지 않고 원뿔 위에 얹혀지게 되는데 이 때 물 속에 잠기는 부분의 부피는 r 이 증가함에 따라 감소한다. 따라서 $r = \dfrac{4}{3}$ 일 때 부피가 최대가 된다.
(3) $\dfrac{2}{3} \le r \le \dfrac{4}{3}$ 인 경우에는 구가 원뿔에 접하게 된다. 아래 그림에서 $\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 이므로 $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ 이고, 이 사실과 삼각형의 닮음을 이용하면 h 는 $(2-2r)$ 임을 알 수 있다.



따라서 회전체의 부피를 구하는 식을 이용하여 물 속에 잠기는 부분의 부피를 구하면

$$\begin{aligned} V(r) &= \frac{2}{3}\pi r^3 + \pi \int_0^{2-2r} (r^2 - x^2)dx \\ &= \frac{2}{3}\pi r^3 + \pi[r^2 x - \frac{1}{3}x^3]_0^{2-2r} \\ &= \frac{2}{3}\pi r^3 + \pi r^2(2-2r) - \frac{\pi}{3}(2-2r)^3 \\ &= \frac{\pi}{3}(4r^3 - 18r^2 + 24r - 8) \end{aligned}$$

이다. 따라서 $V'(r) = 4\pi(r^2 - 3r + 2) = 4\pi(r-1)(r-2)$ 이고 이를 이용하여 증감표를 그려보면 $r = 1$ 에서 최대값을 가짐을 알 수 있다. 따라서 물 속에 잠기는 부분의 부피가 최대일 때는 $r = 1$ 일 때이다.

[**채점기준**] 1. 부피를 반지름에 관한 식으로 정확히 나타내면 10 점.
2. 반지름의 길이에 따른 세 가지 경우를 고려하지 않으면 5 점 감점.
3. 부피의 식과 답은 맞았지만 계산이 틀린 경우는 5 점 감점.

[**채점소감**] 대부분의 학생들이 구가 물 속에 완전히 잠기는 경우나 원뿔 위에 얹혀지는 경우는 전혀 고려하지 않았다. 그리고 물에 잠기지 않는 부분이 최소가 되도록 하는 반지름을 구한 학생들도 많았는데 구의 전체 부피가 변하는 상황에서 이와 같은 방법은 옳지 않다. 또한 적분식을 맞게 구한 학생들 중에서도 미분을 제대로 하지 못한 경우가 많았다.