# 2005 수학성취도평가시험

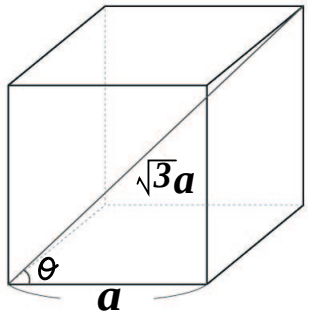
(2005학년도 수시 입학생)

2004 년 12월 22일

- 1번부터 6번은 단답형이고, 7번부터 13번은 서술형입니다.
- 단답형은 답만 쓰고, 서술형은 답과 함께 풀이 과정을 간단 명료하게 쓰시오.
- 각 문항의 배점은 단답형 5점, 서술형 10점입니다.

문제 1 정육면체의 한 모서리와 대각선의 사이각을 $\theta$ 라 할 때 $\cos\theta = \boxed{\phantom{00}}$ 이다.

[풀이] 정육면체의 한 모서리의 길이를 $a$ 라고 하면 대각선의 길이는 $\sqrt{3}a$ 이다. 따라서 $\cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{3}a} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 이다.




문제 2 $x = 0$ 에서 $x = 1$ 까지 곡선 $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ 의 길이는 $\boxed{\phantom{00}}$ 이다.

[풀이] 곡선의 길이는

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx &= \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2}\,dx \\
&= \int_0^1 \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,dx \\
&= \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2}(e - e^{-1})
\end{aligned}$$

이다.

문제 3 $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x}{x-3}\int_3^x \frac{\sin t}{t}\,dt = \boxed{\phantom{00}}$ 이다.

[풀이] $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$ 라고 하면, $\displaystyle\lim_{x\to 3} x \cdot \frac{F(x) - F(3)}{x-3} = 3 \cdot F'(3) = \sin 3$ 이다.

**문제 4** 곡선 $x^3 + y^3 = 6xy$ (단, $x > 0, y > 0$) 위에 $x$축과 평행이 되는 접선을 그었을 때, 접점의 좌표는 $\boxed{\phantom{00}}$ 이다.

[풀이] 음함수의 미분법에 의해

$$3x^2 + 3y^2y' = 6(y + xy')$$

이다. 여기서 접선이 $x$축과 평행일 때에는 $y' = 0$이므로 $3x^2 = 6y$, 즉 $y = \frac{x^2}{2}$ 이다. 이것을 주어진 곡선의 식에 대입하면 $x^3(x^3 - 16) = 0$ 이다. 따라서 $x = 2^{\frac{4}{3}}, y = 2^{\frac{5}{3}}$ 이다.

**문제 5** $\lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-x} \sin x \, dx = \boxed{\phantom{00}}$ 이다.

[풀이] 부분적분법에 의해

$$\begin{aligned} P := \int_0^A e^{-x} \sin x \, dx &= \left[-e^{-x} \sin x\right]_0^A + \int_0^A e^{-x} \cos x \, dx \\ &= \left[-e^{-x} \sin x\right]_0^A + \left[-e^{-x} \cos x\right]_0^A - \int_0^A e^{-x} \sin x \, dx \end{aligned}$$

이다. 위의 식을 정리하면

$$P = \frac{1}{2}\left[-e^{-x} \sin x \ - e^{-x} \cos x \ \right]_0^A = \frac{1}{2}\left[-e^{-A} \sin A - e^{-A} \cos A + 1\right]$$

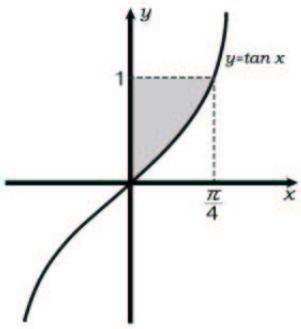
를 얻는다. 따라서

$$\lim_{A\to\infty} P = \frac{1}{2}$$

이다.

**문제 6** 정의역이 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 인 함수 $y = \tan x$ 의 역함수를 $x = f(y)$ 라 할 때, $\int_0^1 f(y) \, dy =$ $\boxed{\phantom{00}}$ 이다.

[풀이] 구하는 적분값을 그림으로 나타내면 다음 어두운 부분이므로



구하는 적분값은

$$\frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \, dx = \frac{\pi}{4} + [\ln|\cos x|]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + \ln\frac{1}{\sqrt{2}}$$

이다.

(다른 풀이) 직접 계산하면

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(y)dy &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)\sec^2 x \, dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cdot \sec^2 x \, dx \\
&= [x \cdot \tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \, dx \\
&= \frac{\pi}{4} + [\ln|\cos x|]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + \ln\frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

이다.

## 문제 7

(가) 미분의 평균값 정리를 써라.

(나) 자동차 두 대가 A 지점에서 B 지점까지 같은 길을 가는데, 동시에 출발하고 동시에 도착하였다면 두 자동차의 속도계가 같은 속도를 가리키는 순간이 적어도 한 번 있었음을 보여라.

[풀이]

(가) 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고, 열린구간 $(a, b)$ 에서 미분가능한 함수 $f$ 에 대하여

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

인 $c$ 가 $(a, b)$ 에 존재한다.

(나) 시간의 범위를 $[0, T]$, 두 차의 시간에 따른 위치를 각각 $f(t), g(t)$ 라 하고, $h(t) = f(t) - g(t)$ 라고 하면, $h(0) = h(T) = 0$ 이다. (가)에 의하여, $h'(c) = 0$ 인 $c$ 가 $(0, T)$ 에 존재한다. $h'(c) = f'(c) - g'(c)$ 이므로, $f'(c) = g'(c)$ 인 $c$ 가 $(0, T)$ 에서 존재한다.

[채점기준]

(가) 가정을 생략하면 3 점.
가정만 쓰면 2 점.

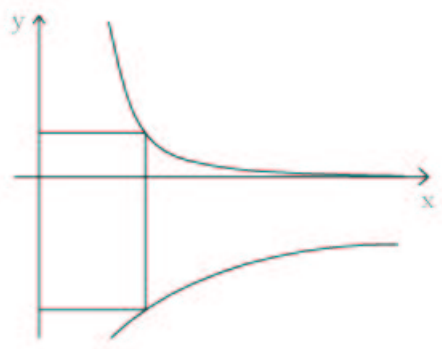
(나) 거리-속도 그래프로만 설명할 시에는 0 점 처리.
"평균속도가 같아서 어느 순간에 같은 속도를 가진다." 0 점 처리.
$f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = \dfrac{g(b) - g(a)}{b - a} = g'(c)$ 라고 쓰면 0 점 처리.

[**채점소감**] 대부분의 학생들이 그래프를 이용하여 문제를 해결하려고 하였다. 또한

$$f'(\alpha) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{g(b)-g(a)}{b-a} = g'(\beta)$$

임에도 불구하고, $\alpha = \beta$로 생각하고 푼 경우가 많았다.

**문제 8** 그림과 같이 영역 $\left\{(x,y) : x \geq 0,\ -\frac{1}{\sqrt{x}} \leq y \leq \frac{1}{x^3}\right\}$에 내접하는 직사각형 가운데 넓이가 최소인 것의 가로 길이 및 넓이를 구하여라.




[**풀이**] 주어진 직사각형의 넓이는

$$S = f(x) = x(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{\sqrt{x}})$$

이다. $x > 0$인 범위에서 넓이의 최소값을 구하기 위해 일단 함수의 극대,극소 및 증감을 조사한다. 먼저 미분하면

$$f'(x) = \frac{x^{\frac{5}{2}} - 4}{2x^3}$$

이므로 $f'(x) = 0$이 되는 $x$의 값을 구하면 $x = \sqrt[5]{16}$이다. $f''(x) = (\frac{4}{x^4} - \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{x^3}})$이고, $f''(\sqrt[5]{16}) = \frac{3}{2^{\frac{16}{5}}} > 0$이므로 $x = \sqrt[5]{16}$에서 극소값을 갖는다. 그러므로 문제에서 요구하는 가로의 길이는 $\sqrt[5]{16}$이고, 최소의 넓이는 $5 \cdot 2^{\frac{-8}{5}}$이다.

(다른풀이)

주어진 함수 $f(x)$에서 각 항 모두 양수이므로 산술평균과 기하평균 사이의 부등식

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$$

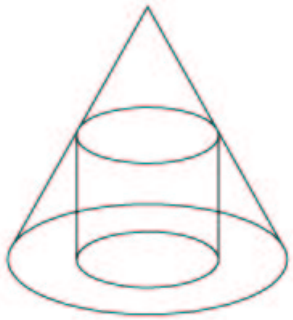
을 이용하면,

$$x(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{\sqrt{x}}) = \frac{1}{x^2} + \frac{\sqrt{x}}{4} + \frac{\sqrt{x}}{4} + \frac{\sqrt{x}}{4} + \frac{\sqrt{x}}{4} \geq 5\sqrt[5]{(\frac{1}{4})^4} = 5 \cdot 2^{-\frac{8}{5}}$$

이고, $\frac{1}{x^2} = \frac{\sqrt{x}}{4}$일 때 등호가 성립하고 최소값을 가진다. 따라서 $x = \sqrt[5]{16}$이고, 최소 면적은 $5 \cdot 2^{\frac{-8}{5}}$이다.

[**채점기준**] 1. 주어진 직사각형의 넓이를 $x$ 에 관한 식으로 나타내면 3 점.
2. $f'(x) = 0$ 이 되는 $x$ 의 값을 맞게 구하면 7 점.
[**채점소감**] 이 문제는 미분을 이용한 최대,최소값 구하는 문제로 자주 소개되는 유형이다. 채점 중 유리함수의 도함수를 구하는 기본적인 내용을 모르거나, 답안을 연습장에 낙서하듯 쓰는 학생이 있는 것을 보았다. 기본적인 계산연습과 답안 쓰는 요령이 부족한 것 같다.

**문제 9** 그림과 같이 원뿔에 내접하는 원기둥 가운데 부피가 최대인 원기둥에 대하여 원기둥과 원뿔의 부피의 비를 구하여라.



[**풀이**] 주어진 원뿔의 높이를 $H$, 밑면의 반지름을 $R$ 이라 하면 주어진 원뿔의 부피는

$$V_0 = \frac{1}{3}\pi R^2 H$$

이다. 그리고 내접하는 원기둥의 높이를 $h$, 밑면의 반지름을 $r$ 이라 하면 구하는 원기둥의 부피는

$$V = \pi r^2 h$$

이다. 여기서 $H : R = H - h : r$ 이 성립하므로 $h = (1 - \frac{r}{R})H$ 이고 $V = \pi r^2(1 - \frac{r}{R})H$ 이다. $V$ 를 $r$ 로 미분하면

$$V' = \pi r(2 - \frac{3}{R}r)H$$

이므로 $r = \frac{2}{3}R$ 에서 $V$ 가 최대값을 가짐을 알 수 있다. 그러면 최대값은

$$V_M = V\big|_{r=\frac{2}{3}R} = \frac{4}{27}\pi R^2 H$$

이고, 이때 원기둥과 원뿔의 부피의 비는

$$V_M : V_0 = \frac{4}{27}\pi R^2 H : \frac{1}{3}\pi R^2 H = 4 : 9$$

이다.

[**채점기준**] $V = \pi r^2(1 - \frac{r}{R})H$ 와 같이 $V$ 를 $r$ 또는 $h$ 에 관한 식으로 정리하면 4 점.
미분해서 $V$ 의 최대값이 $r = \frac{2}{3}R$ 일때 나오는 값임을 확인하면 7 점.
$V$ 의 최대값을 계산해서 부피비를 $4 : 9$ 로 구하면 10 점.

[**채점소감**] 문제를 풀지 못하는 학생들의 대부분은 원기둥의 부피 $V$를 반지름 $r$ 또는 높이 $h$의 함수로 보고 최대값을 구한다는 개념을 잡지 못한 것으로 보인다. 부피를 구하는 공식을 알고는 있지만 이를 하나의 변수에 관한 함수로 정리하지 못하였다. 주어진 상황을 수식으로 표현하고 이를 활용하는 훈련이 필요하다고 느낀다.

- **문제 10**과 **문제 11**에서, 임의의 다항식 $p(x)$에 대하여 $\lim_{x\to\infty}\frac{p(x)}{e^x}=0$ 임을 이용하라.

**문제 10** 다음

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

과 같이 정의된 함수를 생각하자.

(가) 이 함수가 $x=0$에서 미분가능함을 보이고 $f'(0)$의 값을 구하여라.

(나) 함수 $y=f(x)$의 그래프가 아래로 볼록인 구간을 구하여라.

[**풀이**]

(가) 정의로부터

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}}=\frac{\sqrt{h}}{e^h}\qquad (h=\frac{1}{x^2}; x\neq 0)$$

인데, $x\to 0$에 따라 $h\to\infty$ 이므로,

$$\lim_{h\to\infty}\frac{\sqrt{h}}{e^h}\qquad\cdots(*)$$

가 존재함을 보이고, 그 값을 구하라는 문제이다. 그런데

$$0\le\frac{\sqrt{h}}{e^h}\le\frac{h}{e^h}\qquad (h\ge 1)$$

이고

$$\lim_{h\to\infty}\frac{h}{e^h}=0$$

이므로, 극한 $(*)$가 존재하고 그 값은 $0$이다.

(나) 함수 $f(x)$의 이계도함수가 $f''(x)>0$인 구간에서 그 그래프가 아래로 볼록하다. 함수의 이계도함수를 계산하면, $x\neq 0$일 때

$$f''(x) = \left(-e^{-\frac{1}{x^2}}\cdot(-\frac{2}{x^3})\right)'=\frac{2}{x^4}\cdot e^{-\frac{1}{x^2}}\cdot\left(\frac{2}{x^2}-3\right)$$

이다. 따라서 $\frac{2}{x^2}-3>0$인 $x$의 구간을 구하면 된다. 즉,

$$-\frac{\sqrt{6}}{3}<x<\frac{\sqrt{6}}{3}$$

에서 그래프는 아래로 볼록이다.

[채점기준]

(가) 1. 함수 $f$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하기 위한 조건을 명시하면 2 점. (예를 들어 위 모범 답안과 같이 "미분 가능하기 위해서는 $f'(0)=\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ 가 존재함을 보이면 된다" 등의 조건을 명시)

2. 미분가능 조건을 명시하고 $f'(0)=0$ 의 값을 얻으면 5 점.

(나) 1. "함수 $f(x)$ 의 이계도함수가 $f''(x)>0$ 인 구간에서 그 그래프가 아래로 볼록하다."의 조건만 명시하면 2 점.

2. 위 1 의 조건을 명시하고 정답을 바르게 구하면 5 점.

3. 경계값 (변곡점)을 포함시킨 경우에도 정답으로 처리하여 5 점.

[채점소감] 문제가 미적분학의 가장 기본적인 개념인 "미분의 정의"를 묻고 있음에도 불구하고 많은 학생들이 (가)번을 풀지 못했다. 특히 미분가능성을 함수의 연속성과 혼동하는 학생이 많았다. 오히려 (나)번은 대부분의 학생들이 잘 풀었다. 그러나 $f''(x)<0$ 이어야 한다고 답한 학생들도 있었고 이계 미분을 계산해내지 못하는 학생들도 있었다. 그래프의 개형을 따질 줄 아는 것도 매우 중요하나 어떤 수학의 분야에서든 그 기본적인 정의가 가장 중요하다. 위와 같은 결과가 나오게된 이유가 학생들이 단순히 시험에 나오는 문제에 대한 쪽집게식 공부를 해서가 아닌가 한다. 실제로 (나)와 같은 유형의 문제는 수학능력시험에도 종종 출제되었음에 반해 (가)와 같은 기본적인 정의에 관한 질문은 (그것도 서술형으로는) 수능에서는 물론 학교 시험에서도 거의 출제되지 않았던 것으로 보인다.

문제 11 함수 $f(x)=x^2e^{-x}$ 가 주어져 있다.

(가) $y=f(x)$ 의 그래프를 그려라.

(나) 이 그래프와 $x$ 축과 직선 $x=0$ 및 $x=1$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

[풀이]

(가) 주어진 함수를 미분하면

$$f'(x)=x(2-x)e^{-x}$$

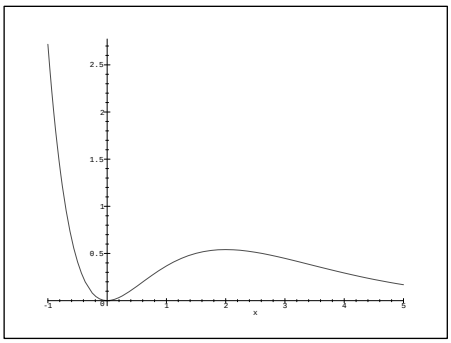
이고,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}=0,\qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{e^x}=\infty$$

이므로 증감표를 그려보면 아래와 같이 된다.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{4}{e^2}$ | $\searrow$ | $0$ |

따라서 그래프는 아래와 같다.




(나) 부분적분법을 이용하여 계산하면

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 x^2 e^{-x} dx \\
= \ & [-x^2 e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 2xe^{-x} dx \\
= \ & [-x^2 e^{-x}]_0^1 + [-2xe^{-x}]_0^1 + \int_0^1 2e^{-x} dx \\
= \ & [-x^2 e^{-x}]_0^1 + [-2xe^{-x}]_0^1 + [-2e^{-x}]_0^1 \\
= \ & -5e^{-1} + 2
\end{aligned}$$

이다.

**[채점기준]**

(가) $(0,0), (2, \frac{4}{e^2})$ 를 기준으로 함수의 증감과 음의 무한, 양의 무한에서 함수의 변화를 옳게 그리면 5 점.

(나) 사소한 계산 실수 3 점.

**[채점소감]** 11.(가),(나) 두 문제 모두 대부분의 학생들이 잘 풀어 정답을 내었다. 하지만, 쉬운 문제임에도 불구하고 문제에 손도 못댄채 백지상태로 비워둔 학생이 소수 있었다.

**문제 12** 좌표공간에 원 $C$ 와 직선 $\ell$ 이 다음

$$C : x^2 + y^2 = 1, \quad z = 0$$

$$\ell : y = 0, \quad z = 1$$

과 같이 주어져 있다. 원 $C$ 의 각 점에서 직선 $\ell$ 까지 최단거리로 연결하는 선분들로 이루어진 곡면과 $xy$ 평면으로 둘러싸인 부분의 부피를 구하여라.

**[풀이]** 주어진 입체도형을 $x$ 축에 수직인 평면으로 잘랐을 때 $x = t$ 에서의 단면은, 밑변의 길이가 $2\sqrt{1-t^2}$ 이고 높이가 1 인 이등변 삼각형이다. 따라서 부피는

$$V = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2} dt = 2\int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt$$

이다. $t = \cos\theta$ 로 치환하여 계산하면

$$V = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2\theta) d\theta = \frac{\pi}{2}$$

이다.

[**채점기준**]
단면의 모습이 맞으면 $+2$.
적분식을 제대로 세우면 $+7$.
마지막까지 맞으면 $+10$.
*계산 실수 $-3$.

[**채점소감**] 비교적 쉬운 문제라서 많은 학생들이 쉽게 풀 수 있으리라 생각 했지만 간단한 적분문제 계산에서 틀린 학생이 꽤 많았다. 직선 위의 한점에서 원 위로의 거리만을 생각해 원뿔로 계산해서 틀린 경우도 종종 있었다.

문제 13 좌표공간에 주어진 다음 두 직선

$$\ell_1 : x = y = z, \qquad \ell_2 : x + 6 = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$$

을 생각하자.

(가) 두 직선이 서로 꼬인 위치에 있음을 보여라.
(나) 두 직선 사이의 최단거리를 구하여라.

[**풀이**]

(가) 두 직선의 방향벡터는 $(1,1,1)$ 과 $(1,2,3)$ 이다. 그러므로 두 직선은 평행하지 않다. 그리고 $\ell_1$ 위의 점은 $(t,t,t)$ 와 같이 표현되고, $\ell_2$ 위의 점은 $(s-6, 2s, 3s)$ 와 같이 표현된다. 그러므로 만일 $\ell_1$ 과 $\ell_2$ 의 교점이 존재한다면

$$t = s - 6 = 2s = 3s$$

을 만족하는 실수 $s, t$ 가 존재해야 한다. 그러나 $s - 6 = 2s$ 로부터 $s = -6$ 이고, $2s = 3s$ 로부터 $s = 0$ 이므로 모순이다. 그러므로 두 직선은 만나지 않는다. 따라서 두 직선 $\ell_1$ 과 $\ell_2$ 는 꼬인 위치에 있다.

(나) **(풀이1)** $\ell_1$ 의 점을 매개변수 $t$ 로 표현하면 $(t,t,t)$ 이고, $\ell_2$ 의 점을 매개변수 $s$ 로 표현하면 $(s-6, 2s, 3s)$ 이다. $\ell_1$ 의 점 $A(t,t,t)$ 와 $\ell_2$ 의 점 $B(s-6, 2s, 3s)$ 를 이은 선분을 벡터로 표시하면 $\overline{AB} = (s-6-t, 2s-t, 3s-t)$ 이다. 두 직선의 최단거리는 선분 $\overline{AB}$ 가 두 직선의 방향벡터와 각각 수직일 때 $\overline{AB}$ 의 길이이다. 따라서

$$\begin{aligned} (s-6-t, 2s-t, 3s-t)\cdot(1,1,1) &= 0 \\ (s-6-t, 2s-t, 3s-t)\cdot(1,2,3) &= 0 \qquad (1) \end{aligned}$$

이다. 그러므로 방정식을 풀면, $t=-8, s=-3$ 이다. 따라서

$$|\overline{AB}| = |(-1,2,-1)| = \sqrt{6}$$

이다.

**(풀이2)** 두 점 사이의 거리는

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(s-6-t)^2+(2s-t)^2+(3s-t)^2} \\ &= \sqrt{3(t-2s+2)^2+2(s+3)^2+6} \qquad (2) \end{aligned}$$

이다. 따라서 $t=-8, s=-3$ 일 때, $d$ 의 최소값은 $\sqrt{6}$ 이다.

[**채점기준**]

(가) 평행이 아님을 보이면 2 점.
만나지 않는다는 것을 보이면 3 점.

(나) (1) 또는 (2)까지 푼 경우 2 점.

[**채점소감**]

(가) 두 직선의 방향벡터는 각각 $(1,1,1)$ 과 $(1,2,3)$ 이다. 두 직선이 평행하다는 것은 한 직선의 방향벡터가 다른 직선의 방향벡터의 실수배와 같다는 것을 말한다. 그러나 많은 학생이 두 직선의 방향벡터가 같지 않기 때문에 평행이 아니라고 썼다. 두 개의 벡터가 같지 않은 것과 두 개의 벡터가 실수배 차이가 나지 않는 것은 분명히 다른 것이다. 또한 몇몇 학생은 $\ell_1$ 과 $\ell_2$ 가 평행하지 않고 만나지 않으므로 꼬인위치에 있다고 쓰고 있는데 이와 같은 것은 증명이라 할 수 없다. 꼬인위치의 정의를 풀어서 서술한 것에 지나지 않는다. 바른 증명의 방법을 익힐 수 있도록 연습해야 할 것이다.

(나) 풀이 1 과 같이 푼 학생들이 대부분이다. 간단한 연립방정식을 푸는 과정에서 계산실수를 한 학생들이 몇몇 있어 아쉬웠다. 풀이 2 의 경우, 두 점 사이의 거리 $d$ 를 $t, s$ 에 대한 함수로 표현하기만 하고 풀이를 중단한 학생이 많았다. 완전제곱식을 이용한 이차함수의 최대최소값 문제에 익숙해질 필요가 있다.