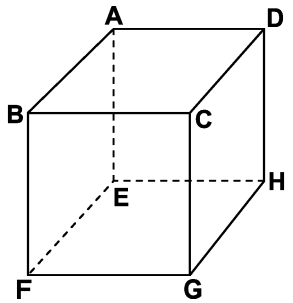
2006 수학성취도평가시험

(2006학년도 수시 입학생)

2005년 12월 27일

- 1번부터 6번은 단답형이고, 7번부터 13번은 서술형입니다.
- 단답형은 답만 쓰고, 서술형은 답과 함께 풀이 과정을 간단 명료하게 쓰시오.
- 각 문항의 배점은 단답형 5점, 서술형 10점입니다.

문제 1 아래 그림과 같이 각 변의 길이가 1 인 정육면체에서, 벡터의 내적 $\overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{CF} = \boxed{}$ 이고 $\overrightarrow{FD} \bullet \overrightarrow{FH} = \boxed{}$ 이다.



[풀이] $\angle ACF$ 와 $\angle DFH$ 를 각각 θ_1, θ_2 라 두자. 그러면 $\overline{CA} = \overline{CF} = \overline{AF}$ 이므로, $\triangle CAF$ 는 정삼각형이되고, $\theta_1 = \dfrac{\pi}{3}$ 이 됨을 알 수 있다. 한편, $\triangle DFH$ 는 직각삼각형이고, $\overline{FD} = \sqrt{3}$, $\overline{FH} = \sqrt{2}$ 이므로 $\cos\theta_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ 이 됨을 알 수 있다. 따라서

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CF} = |\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CF}|\cos\theta_1 = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2} = 1,$$

$$\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{FH} = |\overrightarrow{FD}||\overrightarrow{FH}|\cos\theta_2 = \sqrt{3}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 2$$

이다.

문제 2 $\displaystyle\int_0^1 \cos\sqrt{x}\,dx = \boxed{}$ 이다.

[풀이] $\sqrt{x} = t$ 로 치환하면 $dx = 2tdt$ 이므로, 부분적분법에 의해

$$\begin{aligned}\int_0^1 \cos\sqrt{x}\,dx &= \int_0^1 2t\cos t\,dt \\ &= [2t\sin t]_0^1 - \int_0^1 2\sin t\,dt \\ &= 2\sin 1 + 2\cos 1 - 2\end{aligned}$$

이다.

문제 3 $\lim_{n\to\infty}\left[(2+\frac{1}{n})(2+\frac{2}{n})(2+\frac{3}{n})\cdots(2+\frac{n}{n})\right]^{\frac{1}{n}} = \boxed{}$ 이다.

[풀이] 로그를 취한 뒤 계산하면

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\ln\left(2+\frac{1}{n}\right)+\cdots+\ln\left(2+\frac{n}{n}\right)\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\ln\left(2+\frac{k}{n}\right)\\
&=\int_0^1\ln(2+x)\,dx\\
&=[(x+2)\ln(x+2)-x]_0^1\\
&=3\ln 3-2\ln 2-1\\
&=\ln\frac{27}{4e}
\end{aligned}$$

이다. 따라서 구하려는 값은 $\frac{27}{4e}$ 이다.

문제 4 구간 $(-\infty,\infty)$ 에서 미분가능한 함수 f 가 다음 두 조건

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy,\qquad \lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=5$$

을 만족시키면, $f(x)=\boxed{}$ 이다.

[풀이] 식 $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy$ 의 양변에 $x=0$, $y=0$ 를 대입하면 $f(0)=0$ 이고 주어진 조건으로부터

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=5$$

이다. 이제 식 $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy$ 의 양변을 y에 관하여 미분하면

$$f'(x+y)=f'(y)+x$$

이 된다. 이 식의 양변에 $y=0$ 을 대입하면

$$f'(x)=f'(0)+x=5+x$$

을 얻을 수 있고, 다시 양변을 적분하면

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2+5x+C,\qquad C\text{는 상수}$$

이 된다. 한편, $f(0)=0$ 으로부터 $C=0$ 임을 알 수 있다. 따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+5x$ 이다.

문제 5 단위구 $x^2+y^2+z^2=1$ 과 평면 $x+2y+2z=1$ 이 만나서 생기는 원의 반지름은 $\boxed{}$ 이다.

[풀이] 구의 중심 $(0,0,0)$ 과 평면 $x+2y+2z=1$ 까지의 거리를 d 라 하면, 점과 평면 사이의 거리 공식으로부터

$$d=\frac{|1\cdot 0+2\cdot 0+2\cdot 0-1|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{1}{3}$$

이다. 따라서, 원의 반지름 r 은 피타고라스 정리에 의해

$$r = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

이다.

문제 6 곡선 $y \ln x = \ln y$ 위의 점 (e^{-e}, e^{-1}) 에서 이 곡선에 접하는 접선의 기울기는 $\boxed{}$ 이다.

[풀이] 주어진 식 $y \ln x = \ln y$ 의 양변을 x 에 관하여 미분하면, 합성함수의 미분법에 의해서

$$y' \ln x + y \cdot \frac{1}{x} = \frac{y'}{y}$$

이 된다. 이 식에 $(x, y) = (e^{-e}, e^{-1})$ 을 대입하면

$$y' \ln e^{-e} + e^{-1} \cdot \frac{1}{e^{-e}} = \frac{y'}{e^{-1}}$$

을 얻고, 이로부터 점 (e^{-e}, e^{-1}) 에서 접선의 기울기는 $y' = \dfrac{e^{e-2}}{2}$ 임을 알 수 있다.

문제 7 자연수 $n = 1, 2, 3, \cdots$ 에 대하여 다음이 성립함을 보이라.

$$\cos x \cos 2x \cos 4x \cdots \cos 2^n x = \frac{1}{2^n}\left[\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cdots + \cos(2^{n+1} - 1)x\right]$$

[풀이] 수학적 귀납법에 의해 주어진 식이 성립함을 보이도록 하자.
$n = 1$ 일 때, 삼각함수의 합공식에 의해

$$\cos x \cos 2x = \frac{1}{2}(\cos x + \cos 3x)$$

이 성립한다. $n = k$ 일 때 성립한다고 가정하면

$$\begin{aligned}
&\cos x \cos 2x \cdots \cos 2^{k+1} x \\
&= \frac{1}{2^k}(\cos x + \cos 3x + \cdots + \cos(2^{k+1} - 1)x) \cos 2^{k+1} x \\
&= \frac{1}{2^k}\Big(\cos x \cos 2^{k+1} x + \cos 3x \cos 2^{k+1} x + \cdots + \cos(2^{k+1} - 1)x \cos 2^{k+1} x \Big) \\
&= \frac{1}{2^k}\Bigg[\frac{1}{2}\Big(\cos(2^{k+1} - 1)x + \cos(2^{k+1} + 1)x \Big) + \frac{1}{2}\Big(\cos(2^{k+1} - 3)x + \cos(2^{k+1} + 3)x \Big) \\
&\qquad + \cdots + \frac{1}{2}\Big(\cos x + \cos(2^{k+2} - 1)x \Big) \Bigg] \\
&= \frac{1}{2^{k+1}}(\cos x + \cos 3x + \cdots + \cos(2^{k+2} - 1)x)
\end{aligned}$$

이므로 $n = k + 1$ 일 때도 성립한다. 따라서 수학적 귀납법에 의해 주어진 식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

[채점기준]
- 사소한 계산 및 표기 실수 2점 감점
- 수학적 귀납법을 잘못 사용한 경우 5점 감점
- 수학적 귀납법만 언급하고 계산을 생략한 경우 0점

[채점소감]
문제를 풀지 못한 대부분의 학생들은 삼각함수 공식을 모르거나 익숙하지 않아 보였다. 그래서 수학적 귀납법의 틀만 쓰고 핵심적인 계산은 생략한 채 얼버무린 경우가 많았다. 또한 꽤 많은 학생들이 문제의 우변을 $\frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{n+1}\cos(2^i-1)x$ 로 잘못 이해하고 문제를 풀려고 시도하기도 했다.

문제 8 직선 $x=-p$ 위의 임의의 점에서 곡선 $y^2=4px$ 에 그은 두 접선은 항상 직교함을 보이라.

[풀이] 직선 $x=-p$ 위의 임의의 점 $(-p,q)$ 에서 포물선 $y^2=4px$ 에 그은 접선의 방정식을 $y=mx+n$ 이라 두자. 그러면 이차 방정식 $(mx+n)^2=4px$ 의 판별식 $D=0$ 을 만족하므로 $n=\frac{p}{m}$ 을 얻는다. 즉, 접선의 방정식이 $y=mx+\frac{p}{m}$ 이 됨을 알 수 있다. 또한 이 접선이 점 $(-p,q)$ 를 지나므로

$$pm^2+qm-p=0$$

임을 알 수 있다. 근과 계수와의 관계로부터 두 직선의 기울기의 곱이 -1임을 알 수 있다. 따라서 두 접선은 직교한다.

[채점기준]
점 $(-p,q)$ 에서 접선의 방정식이 $y=mx+\frac{p}{m}$ 형태 임을 보이거나 썼으면 5점이고, 그 이후 올바른 계산을 통해 두 기울기의 곱이 -1임을 보였으면 10점 만점이다.

[채점소감]
포물선에서 접선의 방정식을 공식으로 암기한 학생들이 많았다. 정확한 공식을 기억하고 있는 학생들은 문제를 잘 풀었지만 공식을 제대로 암기하지 못하거나 공식을 모르는 학생의 경우에는 문제를 올바르게 풀지 못했다. 많은 학생들이 공식 위주의 학습법으로 공부하는 것을 실감하였다. 또한 증명 문제에서 무엇을 보이는 문제인지를 파악하지 못하는 학생도 더러 있어 아쉬웠다.

문제 9 구간 $[0,\infty)$ 에서 연속이고 구간 $(0,\infty)$ 에서 두 번 미분가능한 함수 f 가 $f(0)=0$ 을 만족시키고 또한 $0<x<\infty$ 에 대해서 $f''(x)\leqq 0$ 를 만족시킬 때, 다음을 증명하라.

$$f(x+y)\leqq f(x)+f(y) \qquad (x,y\geqq 0)$$

[풀이] $x=0$ 또는 $y=0$ 일 때는 당연히 성립하므로 $x>0$ 이고 $y>0$ 일 때만 증명하면 된다. 고정된 y 에 대하여 $h(x)=f(x+y)-f(x)-f(y)$ 라 하자. 그러면 평균값 정리에 의해

$h'(x) = f'(x+y) - f'(x) = yf''(d_x)$ 를 만족시키는 $d_x \in (x, x+y)$ 가 존재한다. 가정에서 $f'' \leqq 0$ 이고 $y > 0$ 이므로 $h'(x) \leqq 0$ 이다. 따라서 $h(x)$ 는 감소함수가 된다. 한편, $h(0) = 0$ 이고 f 는 $[0, \infty)$ 에서 연속이므로 $h(x) \leqq 0$ 이다. 그러므로

$$f(x+y) \leqq f(x) + f(y) \qquad (x, y \geqq 0)$$

이 성립한다.

[채점기준]

- $x = 0, y = 0$ 인 경우를 확인하지 않은 경우 2점 감점
- 귀류법으로 증명할 때 $f(x+y) \geqq f(x) + f(y)$ 와 같이 등호를 포함시킨 경우 3점 감점
- 전체적인 풀이는 맞지만 틀린 말을 불필요하게 설명에 포함시킨 경우 5점 감점
- 증명의 논리가 틀리거나 증명을 완성하지 못한 경우 0점

[채점소감]

대부분의 학생들은 문제를 풀지 못했고, 풀이를 쓴 대부분의 학생들도 0점을 받았다. 한편, 문제에 주어진 함수를 다항함수로 이해해도 된다고 생각하여 문제를 푼 학생들이 많았고, 그렇게 생각하지 않은 학생들 중에서도 상당수의 학생들이 동치조건으로 착각하여 잘못된 논리를 전개했다. 문제의 뜻을 확실히 이해하고 올바른 증명의 방법을 익힐 수 있도록 연습해야 할 것이다.

문제 10 다음

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & (x \neq 0), \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$$

과 같이 정의된 함수 f 가 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 연속함수이고, 증가함수임을 보이라.

[풀이] 먼저 함수 f 가 연속함수임을 보이자. $x \neq 0$ 일 경우에 함수 f 는 연속인 두 함수 $e^x - 1$ 과 x 에 관한 유리함수이므로 연속이 된다. $x = 0$ 일 경우에는 $h = e^x - 1$ 로 치환하여 계산하면

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{\ln(1+h)} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\ln(1+h)^{\frac{1}{h}}} = \frac{1}{1} = 1 = f(0)$$

이므로 f 는 $x = 0$ 에서도 연속이다. 따라서 f 는 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 연속이다. 이제 f 가 증가 함수임을 보이자. $x \neq 0$ 일 경우에 도함수는

$$f'(x) = \frac{(x-1)e^x + 1}{x^2}$$

이 된다. 여기서 $g(x) = (x-1)e^x + 1$ 라고 하면, $g'(x) = xe^x$ 이므로 g 는 임계점 $x = 0$ 에서 최소값 $g(0) = 0$ 을 가진다. 그러므로 $x \neq 0$ 이면 $g(x) \geqq 0$ 이기 때문에 $f'(x) \geqq 0$ 이고, 함수 f 는 증가한다. $x = 0$ 일 경우에는 x가 양수일 때 0근처에서 부등식 $\frac{x^2}{2} \leqq e^x - x - 1 \leqq \frac{x^2}{2} + x^3$ 이 성립하고 x가 음수일 때 0근처에서 $\frac{x^2}{2} + x^3 \leqq e^x - x - 1 \leqq \frac{x^2}{2}$ 이 성립하므로

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} = \frac{1}{2} > 0$$

이 된다. 즉 f 는 $x = 0$ 에서 증가한다. 따라서, f 는 $(-\infty, \infty)$ 에서 증가함수이다.

[채점기준]

(1)연속함수임을 보이는데 있어서 $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ 임을 보이면 5점. 계산이 생략된 경우는 0점

(2) 증가함수임을 보이는데 있어서 $x \neq 0$ 일때 $f'(x) \geqq 0$ 임을 보이면 5점. 부등식이 성립함을 명확히 보이지 못한 경우는 0점

[채점소감]

대체적으로 학생들이 모두 잘 풀었다. 하지만, 계산능력이 다소 부족한 학생들이 있었다. 이런 학생들은 좀더 정확한 계산을 하는 연습을 해야할 것이다.

문제 11 좌표공간의 세 점 $A(2,0,0)$, $B(1,1,0)$, $C(0,0,1)$ 을 꼭지점으로 하는 ΔABC 를 평면 $2x-y+z=6$ 위로 정사영시킨 $\Delta A'B'C'$ 의 넓이를 구하라.

[풀이] S 와 S' 를 각각 $\triangle ABC$ 와 $\triangle A'B'C'$ 의 넓이라 하자.

(방법 1) 우선 삼각형의 넓이를 구하는 공식으로부터

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

이 된다. $\triangle ABC$ 와 $\triangle A'B'C'$ 이 이루는 예각을 θ 라 하자. 점 A, B, C 를 포함하는 평면의 방정식을 구하면 $x+y+2z=2$ 이므로 이의 법선벡터 $(1,1,2)$ 와 주어진 평면 $2x-y+z=6$ 의 법선벡터 $(2,-1,1)$ 이 이루는 각이 θ 가 된다. 이 때

$$\cos\theta = \frac{(1,1,2)\cdot(2,-1,1)}{|(1,1,2)||(2,-1,1)|} = \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{1}{2}$$

이므로

$$S' = S\cos\theta = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

이 된다.

(방법 2) 점 A 를 지나고 방향벡터가 $(2,-1,1)$ 인 직선 위의 점들은 임의의 실수 t 에 대하여 $(2t+2,-t,t)$ 와 같이 표현된다. 직선 $(2t+2,-t,t)$ 과 평면 $2x-y+z=6$ 이 만날 때는 $2(2t+2)-(-t)+t=6$ 가 되어 $t=\frac{1}{3}$ 이다. 따라서, 점 A' 은 $(\frac{8}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ 이 된다. 비슷한 방법으로 점 B' 은 $(\frac{8}{3},\frac{1}{6},\frac{5}{6})$ 이고, 점 C' 은 $(\frac{5}{3},-\frac{5}{6},\frac{11}{6})$ 이 됨을 알 수 있다. 따라서

$$S' = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{A'B'}|^2|\overrightarrow{A'C'}|^2 - (\overrightarrow{A'B'}\cdot\overrightarrow{A'C'})^2} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

이다.

[채점기준]

(방법 1) $\triangle ABC$ 의 넓이 계산 4점, $\triangle ABC$ 의 법선벡터와 $\cos\theta$ 의 계산 4점, $S' = S\cos\theta$ 임을 알면 2점. 단, 첫번째와 두번째 단계 설명 없으면 각각 2점이고 두번째 단계 법선벡터만 올바르게 구하면 2점

(방법 2) 점 A', B', C' 의 좌표계산 각각 2점, S' 의 계산 4점

[채점소감]

문제를 푼 학생들은 대부분 1번 방법에 의해서 문제를 잘 풀었다. 하지만 꼭지점의 좌표를 이용한 2번 방법으로 풀려고 시도한 학생들도 많았다. 삼각함수의 기본성질(예를 들면, $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$), 이면각과 법선벡터의 연관성 등의 기초가 부족한 학생들이 상당수가 있었다.

문제 12 평면 위의 세 점 $A=(1,0)$, $B=(0,\frac{3}{2})$, $C=(-1,0)$에 대하여, 두 점 P,Q가 다음 두 조건을 만족시킨다.

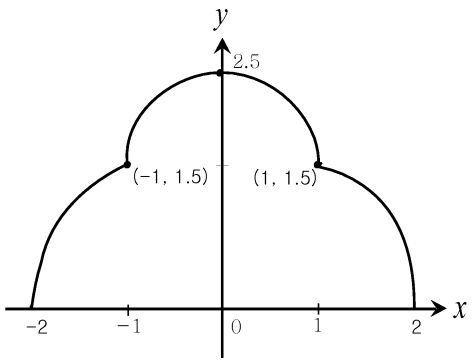
$$\overline{PB}=1 \qquad (\text{단, } P=(x,y)\text{에서 } y\geqq\tfrac{3}{2})$$
$$\overline{QA}+\overline{QC}=4 \qquad (\text{단, } Q=(x,y)\text{에서 } |x|\geqq 1,\ y\geqq 0)$$

(가) 점 P,Q의 자취와 x-축으로 둘러싸인 도형의 개형을 그리라.

(나) (가)의 도형을 x-축의 둘레로 회전시켜 얻은 회전체의 부피를 구하라.

[풀이]

(가) 원과 타원의 정의에 의하여 P의 자취는 점 B를 중심으로 하고 반지름이 1인 원의 상반원이고, Q의 자취는 타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$의 일부로서 $(-2,0)$과 $(-1,\frac{3}{2})$ 그리고, $(1,\frac{3}{2})$과 $(1,0)$을 양 끝점으로 하는 부분이 됨을 알 수 있다. 따라서, P와 Q의 자취와 x축으로 둘러싸인 도형의 개형은 다음과 같다.



(나) 가)에서 주어진 곡선을 매개화하면 다음과 같다.

$$y=\sqrt{1-x^2}+\frac{3}{2}, \qquad (-1\leqq x\leqq 1,\ y\geqq\frac{3}{2})$$
$$y=\sqrt{3-\frac{3}{4}x^2}, \qquad (-2\leqq x\leqq -1,\ 1\leqq x\leqq 2,\ y\geqq 0)$$

따라서 구하고자 하는 회전체의 부피는 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
V &= \pi\int_{-1}^{1}(\sqrt{1-x^2}+\frac{3}{2})^2dx+\pi\int_{1}^{2}(3-\frac{3}{4}x^2)dx+\pi\int_{-2}^{-1}(3-\frac{3}{4}x^2)dx \\
&= 2\pi\int_{0}^{1}(\frac{13}{4}-x^2+3\sqrt{1-x^2})dx+2\pi\int_{1}^{2}(3-\frac{3}{4}x^2)dx \\
&= 2\pi[\frac{13}{4}x-\frac{1}{3}x^3]_0^1+6\pi\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx+2\pi[3x-\frac{x^3}{4}]_1^2 \\
&= \frac{35}{6}\pi+\frac{3}{2}\pi^2+\frac{5}{2}\pi \\
&= \frac{3}{2}\pi^2+\frac{25}{3}\pi
\end{aligned}
$$

여기서 $\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx$ 의 계산은 중심이 원점이고 반지름이 1인 원의 넓이의 $\frac{1}{4}$ 임을 이용하거나, $x=\sin\theta$ 로 치환하여 계산한다.

[채점기준]

(가) - 개형을 정확히 그린 경우 5점
- 점 P 와 Q 의 각각의 자취만 아는 경우 즉, 교점의 위치가 정확하지 않은경우 3점
- 풀이 도중 경미한 실수가 있는 경우 3점
- 도형의 모양이 다르면 0점

(나) - 정확히 답을 구한 경우 5점
- 회전체의 부피를 구하는 식을 정확히 썼으나 계산 실수로 틀린 경우 3점
- 가)를 약간 틀리게 풀었으나 그 식을 이용하여 정확한 계산을 하였으면 5점

[채점소감]

(가) 많은 학생이 잘 풀었으나, 전혀 풀이를 시도하지 않은 학생들이 종종 있었다. 또한, 문제가 요구하는것을 잘 알고 있음에도 불구하고 주관식 문제의 답을 작성하는데 익숙하지 않아서 감점이 되는 사례가 많았다.

(나) 많은 학생들이 회전체의 부피를 구하는 식을 알고 있음에도 불구하고 적분계산을 잘 하지 못해 감점을 당하는 경우가 많았다. 계산을 정확히 하는 것이 매우 중요함에도 불구하고 학생들이 이 부분을 소홀히 한 것 같다.

문제 13 길이가 각각 $30cm$, $40cm$, $50cm$ 인 막대기로 삼각형을 만들어 수평이 되게 놓고, 그 위에 반지름이 $20cm$ 인 공을 삼각형의 세 변에 접하도록 올려 놓았을 때, 삼각형 밑에 있는 공의 부분의 부피를 구하라.

[풀이] 길이가 $30cm, 40cm, 50cm$ 인 삼각형위에 반지름이 $20cm$ 인 구를 올려 놓았을 때 삼각형에 의해 잘려져 생긴 원의 반지름 r은 삼각형의 내접원의 반지름이므로 넓이를 이용하면

$$\frac{1}{2}\cdot(30\cdot 40)=\frac{1}{2}\cdot(30+40+50)\cdot r$$

이므로 $r=10cm$ 임을 알 수 있다. 그리고 구의 중심에서 그 원의 중점 까지의 거리 d는 피타고라스의 정리에 의해서 $d=10\sqrt{3}\text{cm}$ 가 된다. 따라서 구하고자 하는 삼각형 밑에 있는 공

의 부피 V 는 원의 일부분 $x^2+y^2=400(\ 10\sqrt{3} \leqq x \leqq 20)$ 을 x 축 둘레로 회전시켜 얻은 회전체의 부피와 같다. 따라서

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{10\sqrt{3}}^{20} y^2 dx = \pi \int_{10\sqrt{3}}^{20} (400-x^2) dx \\ &= \frac{1}{3}(16000-9000\sqrt{3})\pi \end{aligned}$$

이 된다.

[채점기준]

- r 을 구하면 3점
- 적분식이 맞으면 4점
- 적분 계산이 맞으면 3점

[채점소감]

대부분의 학생들이 삼각형으로 잘려지는 원의 반지름은 쉽게 구했지만 적분구간을 반지름의 길이부터 20까지로 잡은 학생들이 많았다. 아마도 공간상에서 잘려지는 밑부분의 시작하는 길이를 착각한 듯 하다. 또한, 회전체의 부피가 π배 만큼 곱해 진다는 걸 간과한 학생들도 많았다.