2007 수학성취도 평가시험

(2007학년도 수시 입학생)

2006년 12월 20일

- 1번부터 6번은 단답형이고, 7번부터 12번은 서술형입니다.
- 단답형은 답만 쓰고, 서술형은 풀이 과정과 답을 간단 명료하게 쓰시오.
- 각 문항의 배점은 단답형 5점, 서술형 7번∼10번 10점, 서술형 11번∼12번 15점입니다.

문제 1 $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x^5-1}\int_1^x e^{t^5}\,dt = \boxed{}$ 이다.

[풀이] $F(t) = \int_1^x e^{t^5}\,dt$ 라고 하면 $F'(x) = e^{x^5}$ 이다. 미적분학의 기본정리와 미분계수의 정의에 의해,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{1}{x^5-1}\int_1^x e^{t^5}\,dt &= \lim_{x\to 1} \frac{1}{x^4+x^3+x^2+x^1+1}\cdot \lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_1^x e^{t^5}\,dt \\ &= \frac{1}{5}\lim_{x\to 1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1} \\ &= \frac{1}{5}F'(1) \\ &= \frac{e}{5}\end{aligned}$$

이다.

문제 2 $f(x) = \int_2^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$의 역함수를 g라 할 때 $g'(0) = \boxed{}$ 이다.

[풀이] $f(2) = 0$ 이므로 $g(0) = 2$ 이고,

$$g'(0) = \frac{1}{f'(g(0))} = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{\left.\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\right|_{t=2}} = \sqrt{17}$$

이다.

문제 3 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx = \boxed{}$ 이다.

[풀이] $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1+\cos x}{2}$ 과 $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$ 임을 이용하면,

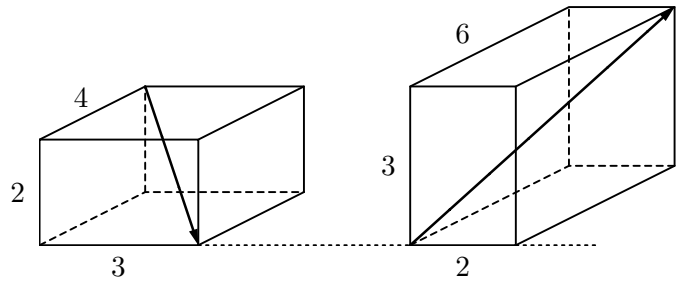
$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos x}dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos x}dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}dx - [\ln(1+\cos x)]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}dx + \ln 2 \\ &= \left[\tan\frac{x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \ln 2 \\ &= 1+\ln 2\end{aligned}$$

이다.

문제 4 곡선 $x^2 - xy + y^2 = 3$의 그래프상의 점 (x, y)중에서 y값의 최대값은 $\boxed{}$ 이고, 최소값은 $\boxed{}$ 이다.

[풀이] 주어진 식을 x에 대한 방정식 $x^2 - yx + (y^2 - 3) = 0$ 으로 생각하자. 이 방정식이 실근을 갖기 위해서는 판별식 D가 $D = y^2 - 4(y^2 - 3) \geqq 0$ 이어야 한다. 그러므로, 실근을 갖도록 하는 y값의 범위는 $-2 \leqq y \leqq 2$ 이다. 따라서, 최대값은 2, 최소값은 -2이다.

문제 5



위의 그림과 같이 크기 $4 \times 3 \times 2$와 크기 $6 \times 2 \times 3$의 직육면체가 한 쪽 모서리를 동일한 직선 위에 놓고 일정 거리를 사이에 두고 놓여 있다. 그림에 표시된 두개의 벡터를 평행이동하여 시점을 일치시켰을 때 두 벡터가 이루는 각을 θ라 하면 $\cos\theta = \boxed{}$ 이다.

[풀이] 두 벡터의 시점이 3차원 공간에서의 원점이 되도록 평행이동한 후, 이를 각각 $\vec{a}, \vec{b}$ 라고 하면, $\vec{a}, \vec{b}$ 의 좌표는 $\vec{a} = (4, 3, -2)$, $\vec{b} = (-6, 2, 3)$ 이다. 따라서 $\cos\theta$는

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{4\cdot(-6) + 3\cdot 2 + (-2)\cdot 3}{\sqrt{4^2+3^2+(-2)^2}\sqrt{(-6)^2+2^2+3^2}} = -\frac{24}{7\sqrt{29}}$$

이다.

문제 6 좌표공간의 네 점 $O(0,0,0)$, $A(1,2,-1)$, $B(-1,2,1)$, $C(-1,1,3)$이 주어져 있다. 이 네 점을 꼭지점으로 하는 사면체의 부피는 $\boxed{}$ 이다.

[풀이] 밑면 $\triangle OAB$의 넓이 S를 구하기 위해, $\angle AOB$를 θ라 하면,

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|} = \frac{-1+4-1}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{1}{3}$$

이다. 따라서, 밑면의 넓이 S 는

$$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\sin\theta = \frac{1}{2}\sqrt{6}\sqrt{6}\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = 2\sqrt{2}$$

이다.

이제 밑면 $\triangle OAB$와 점C사이의 거리 h를 구하기 위해, 세 점 O, A, B를 포함하는 평면의 방정식을 $ax+by+cz+d=0$이라고 하자. 여기에 세 점 O, A, B 의 좌표를 대입하면

$$\begin{cases} a\cdot 0+b\cdot 0+c\cdot 0+d=0, \\ a+2b-c+d=0, \\ -a+2b+c+d=0 \end{cases}$$

이고, 이 연립방정식을 풀어서 평면의 방정식 $x+z=0$을 얻을 수 있다. 한편, h는 점 C로부터 평면 $x+z=0$까지의 거리이므로,

$$h = \frac{|-1+3|}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

가 되고, 사면체의 부피 V는

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = \frac{4}{3}$$

이다.

문제 7 $f_1(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ $(1<x<e$일 때$)$, $f_2(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ $(e<x$일 때$)$이고 $g(x) = f_2^{-1}\circ f_1(x)$ $(1<x<e$일 때$)$라 하자. $g'(x) = \dfrac{[g(x)]^2(1-\ln x)}{[1-\ln g(x)]x^2}$임을 보여라.

[풀이] (방법 1) $g(x) = f_2^{-1}\circ f_1(x)$ $(1<x<e$일 때$)$에서 양변에 f_2를 합성하면

$$f_2\circ g(x) = f_1(x) \ (1<x<e\text{일 때})$$

를 얻는다. 양변을 미분하면

$$f_2'(g(x))g'(x) = f_1'(x)$$

이므로, $g'(x)$는

$$g'(x) = \frac{f_1'(x)}{f_2'(g(x))} = \frac{[g(x)]^2(1-\ln x)}{[1-\ln g(x)]x^2}$$

이다.

(방법 2) $g(x)$를 미분하면

$$g'(x) = (f_2^{-1})'(f_1(x))f_1'(x)$$

이다. 그런데 $f_2^{-1}(x)$를 미분하면 $(f_2^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f_2'(f_2^{-1}(x))}$이므로

$$(f_2^{-1})'(f_1(x)) = \frac{1}{f_2'(f_2^{-1}(f_1(x)))} = \frac{1}{f_2'(g(x))}$$

이고, 따라서 $g'(x)$는

$$g'(x) = \frac{f_1'(x)}{f_2'(g(x))} = \frac{[g(x)]^2(1-\ln x)}{[1-\ln g(x)]x^2}$$

이다.

[채점기준]

- 계산 실수는 5점 감점.
- (방법2)에서 $(f_2^{-1})'(f_1(x))$를 구하는 과정을 정확히 서술하지 않으면 5점 감점.
- 역함수의 미분을 잘못 구하는 경우는 0점.

[채점소감]

합성함수의 미분과 역함수의 미분을 정확히 알고있는지 묻는 문제이다. 이 문제의 답안을 백지로 남겨둔 학생들이 상당히 많았고, 틀리게 푼 학생들의 대부분은 f_1 과 f_2 의 식이 같다고 생각하여 $g(x) = x$ 로 풀었거나 역함수의 미분을 $(f_2^{-1})'(x) = \frac{1}{f_2'(x)}$ 로 풀이하였다. 이 외에도 $(f_2^{-1})'(f_1(x))$를 잘못 구해서 생긴 오답도 간혹 있었다.

문제 8 구간 $[a,b]$에서 연속인 함수 f가 $g(a) = g(b) = 0$인 임의의 연속함수 g에 대하여

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$$

이라 한다. 모든 $x \in [a,b]$에 대하여 $f(x) = 0$임을 보여라.

[풀이] $f(x_0) \neq 0$인 $x_0 \in [a,b]$가 존재한다고 가정하자. f는 연속이므로, 만약 $f(x_0) > 0$ 이라면 모든 $x \in (\alpha, \beta)$ 에 대해 $f(x) > 0$ 이 되는 $[a,b]$의 적당한 부분 구간 (α, β) 이 존재한다. 이제 $g(x)$를 다음과 같이 정의하기로 한다.

$$g(x) = \begin{cases} -(x-\alpha)(x-\beta), & x \in (\alpha, \beta) \text{ 인 경우} \\ 0, & \text{그 외의 경우.} \end{cases}$$

그러면 g는 연속이고 $g(a) = g(b) = 0$이지만

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx > 0$$

이 되어 모순이다. $f(x_0) < 0$ 인 경우에는 $-f(x_0) > 0$ 임을 이용하여 마찬가지로 모순임을 보일 수 있다. 따라서 모든 $x \in [a,b]$ 에 대해 $f(x) = 0$ 이다.

[채점기준]

- 연속성을 이용하여 $f(x) > 0$인 구간 설정하는 데까지 3점.

- 조건에 맞는 g를 잘 찾으면 8점.
- 모순을 이끌어내는 데까지 10점.

[채점소감]
임의의 f에 대한 풀이가 아니라 조건을 만족하는 함수 f 의 예를 들어 증명을 하려는 학생이 많았다. 또한 평균값 정리를 이용하여 특정한 한 점에서 대해서만 증명을 한 학생도 많았다.

문제 9 f를 구간 $(0,1)$에서 두 번 미분가능하고 $[0,1]$에서 연속이며, $f(0)=0, f(1)=3$, $f''\le 0$인 함수라 하자. 만약 $\displaystyle\int_0^1 xf(x)dx = 1$이면 구간 $[0,1]$에서 $f(x)=3x$임을 보여라.

[풀이] $f(0)=0, f(1)=3, f''(x)\le 0$ 이고, $[0,1]$에서 연속이므로 $f(x)$의 그래프는 위로 볼록이거나 직선이다. 따라서, 모든 $x\in[0,1]$에 대해 $f(x)\ge 3x$ 이다. $g(x)$를 $g(x)=f(x)-3x$ 라 하면 모든 $x\in[0,1]$ 에 대해 $g(x)\ge 0$ 이므로, 구간 $[0,1]$에서 $xg(x)\ge 0$ 이다. 한편,

$$\int_0^1 xg(x)dx = \int_0^1 (xf(x)-3x^2)dx = 1-1=0$$

이므로, $g(x)$ 는 구간 $[0,1]$에서 0 인 함수이다. 따라서, $f(x)$는 구간 $[0,1]$ 에서 $f(x)=3x$ 이다.

[채점기준]
- $f(x)$를 다항함수로 두고 풀면 0점.
- 논리에 오류가 있는 경우 5점 감점.

[채점소감]
많은 학생들이 아예 풀지 못하거나 $f(x)$를 다항함수로 두고 풀었다. 또한, 귀류법을 이용하여 문제 풀이를 시도한 학생도 다소 있었는데, 논리적으로 맞지 않는 경우가 대부분이었다.

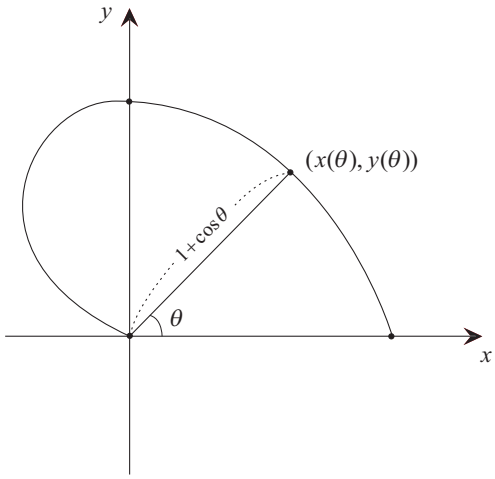
문제 10 좌표평면에서 편각 θ에 따라 움직이는 동점 $(x(\theta),y(\theta))$에서 원점까지의 거리가 $1+\cos\theta$라 한다. $0\le\theta\le\pi$일 때 동점의 자취의 길이를 구하라.

[풀이] 동점 $(x(\theta),y(\theta))$에서 원점까지의 거리가 $r=1+\cos\theta$ 로 주어졌으므로,

$$\begin{aligned}(x(\theta),y(\theta)) &= ((1+\cos\theta)\cos\theta,\ (1+\cos\theta)\sin\theta)\\ &= (\cos\theta+\cos^2\theta,\ \sin\theta+\cos\theta\sin\theta),\quad (0\le\theta\le\pi)\end{aligned}$$

이다. $x(\theta)$ 와 $y(\theta)$ 를 θ 에 대해 미분하면

$$x'(\theta) = -\sin\theta-\sin 2\theta,\quad y'(\theta)=\cos\theta+\cos 2\theta$$



이므로, 자취의 길이 l 은

$$
\begin{aligned}
l &= \int_0^{\pi} \sqrt{\{x'(\theta)\}^2 + \{y'(\theta)\}^2}\ d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \sqrt{\sin^2\theta + 2\sin\theta\sin 2\theta + \sin^2 2\theta + \cos^2\theta + 2\cos\theta\cos 2\theta + \cos^2 2\theta}\ d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \sqrt{2 + 2\sin\theta\sin 2\theta + 2\cos\theta\cos 2\theta}\ d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \sqrt{2 + 2\cos\theta}\ d\theta \\
&= \int_0^{\pi} 2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|\ d\theta \\
&= 4\left[\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi} \\
&= 4
\end{aligned}
$$

가 된다.

[채점기준]

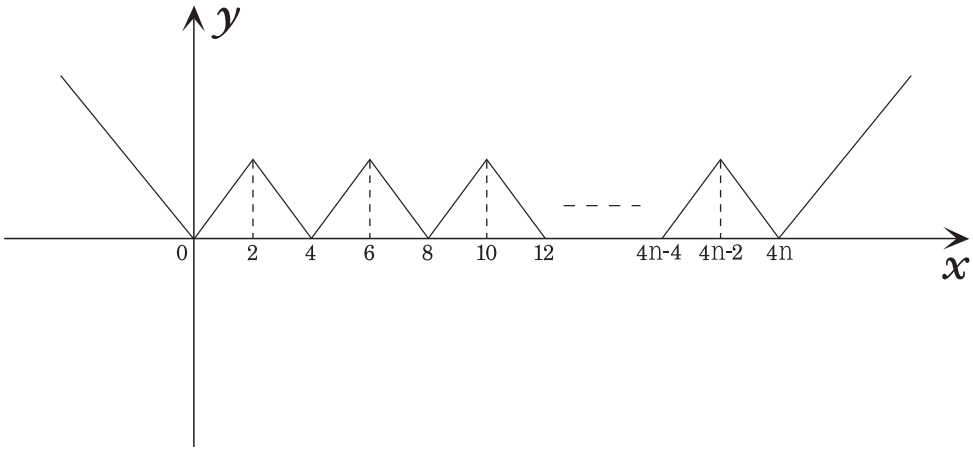
- 곡선의 길이를 구하는 공식까지 3점.
- 답을 완벽히 계산하면 10점

[채점소감]

비교적 쉬운 난이도의 문제라 대체적으로 잘 풀었다. 그러나 미분이나 적분 계산을 잘 못하거나 실수로 인해 감점된 학생들이 다소 있었다.

문제 11 함수 $f(x) = ||x| - 2|$와 $n = 1, 2, \cdots$에 대하여 $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n\text{번}}$ 이라 하고, $S_n = \{(x, y) : f^n(\sqrt{x^2 + y^2} - 2n) \le 1\}$이라 하자. A_n을 S_n의 면적이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} A_n$의 값을 구하라.

[풀이] $f^n(x-2n)$의 그래프는 아래와 같다.



따라서, $f^n(\sqrt{x^2+y^2}-2n) \le 1$이 되려면 $\sqrt{x^2+y^2}$의 값이 구간 $[0,1]\cup[3,5]\cup[7,9]\cup\cdots\cup[4n-1,4n+1]$에 포함되어야 한다. 그러면 A_n 은

$$\begin{aligned}
A_n &= \pi\{1^2+(5^2-3^2)+(9^2-7^2)+\cdots+\big((4n+1)^2-(4n-1)^2\big)\} \\
&= \pi\{1+2(5+3)+2(9+7)+\cdots+2\left((4n+1)+(4n-1)\right)\} \\
&= \pi(1+2\cdot 8+2\cdot 16+\cdots+2\cdot 8n) \\
&= \pi\left\{1+16\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right\} \\
&= \pi(8n^2+8n+1)
\end{aligned}$$

이다. 따라서,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}A_n = \lim_{n\to\infty}\frac{8n^2+8n+1}{n^2}\pi = 8\pi$$

이다.

[채점기준]

- A_n을 맞게 구하면 10점.
- A_n을 유도하는 과정에서 사소한 실수가 있으면 5점.

(예를 들면 구간에서 $[0,1]$을 제외시킨 경우, A_n을 구할 때에 π를 빼먹는 경우 등)

- 위에서 실수를 했어도 계산이 끝까지 맞으면 10점.
- A_n은 맞게 구하고 마지막 계산에서 π 빼먹으면 13점.

[채점소감]

제대로 푼 학생들이 많지 않았다. $f(x)$ 의 그래프에서 찬찬히 생각해보면 $f^n(x)$ 의 개형을 알 수 있었을텐데 대부분의 학생들이 이 단계에서 어려움을 느낀 것 같다. 끝까지 문제를 푼 학생들 중에서는 사소한 실수로 감점받은 학생들이 다소 있었다. 조금 더 신경써서 풀이하는 것이 좋겠다.

문제 12 좌표공간에 $2x^2+y^2-4z^2=2$로 주어진 곡면을 S라 하자. 이 곡면 위의 한 점 $P(1,2,1)$에서의 접평면의 방정식을 다음과 같이 구해보자.

(가) 평면 $z=1$와 S의 교집합으로 주어지는 곡선의 점 P에서의 접선 L의 방정식을 구하라.

(나) 평면 $y=2$와 S의 교집합으로 주어지는 곡선의 점 P에서의 접선 M의 방정식을 구하라.

(다) 두 직선 L과 M을 동시에 포함하는 평면의 방정식을 구하라.

[풀이] (가) 주어진 곡면과 평면의 교선은 평면 $z=1$ 위의 타원 $2x^2+y^2=6$ 이 된다. 여기에서 타원의 접선을 구하는 공식을 이용하여 점 $(1,2)$에서 접선의 방정식을 구하면 된다.
(방법1) 음함수 미분법을 이용한다. 타원의 방정식을 x 로 미분하면

$$4x+2y\frac{dy}{dx}=0$$

이고,

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,2)}=-\left.\frac{2x}{y}\right|_{(1,2)}=-1$$

이다. 기울기가 -1이고 점 $(1,2)$를 지나는 직선의 방정식은 $x+y=3$ 이므로,

$$L: x+y=3, z=1$$

이다.
또는, 다음과 같이 써도 무방하다.

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y-2}{1},\quad z=1.$$

(방법2) 접선의 방정식 $y=mx+b$ 를 $2x^2+y^2=6$ 에 대입하여 m과 b를 구하여도 된다.

(나) (가)와 같은 방법으로

$$M: x-2z=-1,\ y=2$$

를 구할 수 있다.
또는, 다음과 같이 써도 무방하다.

$$\frac{x-1}{2}=\frac{z-1}{1},\quad y=2.$$

(다) 구하고자 하는 평면의 방정식을 $ax+by+cz+d=0$이라 놓자. 그러면 이 평면은 벡터 (a,b,c) 와 수직이다. 따라서, L의 방향벡터 $(-1,1,0)$, M의 방향벡터 $(2,0,1)$ 은 (a,b,c)

와 수직이다. 수직인 두 벡터의 내적이 0 이므로,

$$\begin{aligned}(-1,1,0)\cdot(a,b,c) &= 0\\ (2,0,1)\cdot(a,b,c) &= 0\end{aligned}$$

이고, 여기서 $b=a,\ c=-2a$ 임을 알 수 있다.
또한 이 평면은 점 $P(1,2,1)$을 지나므로 $a+2b+c+d=0$이고, $b=a,\ c=-2a$ 임을 이용하면 $d=-a$ 이다. 따라서, 두 직선 L과 M을 동시에 포함하는 평면의 방정식은 $x+y-2z-1=0$ 이다.

[채점기준]

(가) • $z=1$ 빠지면 1점 감점.
- 계산 실수는 2 점 감점.
- L이 정확하게 나오면 5점.

(나)• $y=2$ 빠지면 1점 감점.
- 계산 실수는 2 점 감점.
- M이 정확하게 나오면 5점.

(다)• 계산 실수는 1점 감점.
- (가), (나)에서의 실수로 인해 (다)가 틀렸어도 논리가 맞으면 3점.
- 정확히 식을 구하고 답이 맞으면 5점.

[채점소감]

(가),(나) 대부분의 학생들이 $z=1$, 또는 $y=2$ 를 쓰지 않았다. 또한 문제에서 접점이 주어짐에도 불구하고 임의로 접점을 (p,q)로 잡고, 답도 (p,q) 에 관한 접선으로 쓰는 학생도 종종 있었는데, 접선에 대한 개념이 잘 정립되지 않은 것으로 생각된다. 또한 판별식을 이용하면, 2가지 식을 얻을 수 있고, 이 중 접점이 실제로 통과하는 직선을 구해야 하는데 상당수의 학생들이 두 개의 식을 구하고 끝냈다.
(다) 직선의 방정식에서 방향벡터와 평면의 법선벡터의 개념을 잘 알지 못하여 이를 혼동하여 사용하는 학생이 많았다.