2008 수학성취도 평가시험

(2008학년도 수시 입학생)

2007년 12월 21일, 고사시간 90분

- 1번부터 6번은 단답형이고, 7번부터 10번은 서술형입니다.
- 답안지는 깨끗한 글씨로 바르게 작성하되, 단답형은 답만 쓰고, 서술형은 풀이과정과 답을 명시하시오.
- 총 배점은 100점이고, 각 문항의 배점은 단답형은 8점(무답 1점, 오답 0점), 서술형은 13점입니다.

문제 1 실수 전체 집합에서 정의된 함수 $f(x) = \sum_{n=0}^{20} |x - n^2|$ 의 최소값은 $\boxed{}$이다.

[풀이] 함수는 구간 $[(n-1)^2, n^2]$ 에서 일차함수이고, 그 기울기가 $x < 10^2$ 에서는 음이고 $x > 10^2$ 에서는 양이다. 따라서 함수의 최소값은 $x = 10^2$ 일 때이다. 그리고 $\sum_{n=1}^{k} n^2 = k(k+1)(2k+1)/6$ 을 이용하면

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{20} |10^2 - n^2| \\
= & \sum_{n=0}^{10} (10^2 - n^2) + \sum_{n=11}^{20} (n^2 - 10^2) \\
= & \left(11 \times 10^2 - \frac{10 \times 11 \times 21}{6}\right) + \left(\frac{20 \times 21 \times 41}{6} - \frac{10 \times 11 \times 21}{6} - 10 \times 10^2\right) \\
= & (11 - 10) \times 10^2 - 2 \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} + \frac{20 \times 21 \times 41}{6} \\
= & 100 + 2100 \\
= & 2200
\end{aligned}$$

이다.

문제 2 좌표공간에서 두 식 $x + z = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ 의 공통부분으로 주어진 원과 식 $x + 2y - z = 6$ 으로 주어진 평면 사이의 최단 거리는 $\boxed{}$이다.

[풀이] 주어진 원은 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$ 이다. 또 원의 임의의 한 점은

$$(1, 0, -1)\cos t + \sqrt{2}(0, 1, 0)\sin t = (\cos t, \sqrt{2}\sin t, -\cos t)$$

로 주어진다. 여기서 주어진 평면까지의 거리는

$$\frac{|2\cos t + 2\sqrt{2}\sin t - 6|}{\sqrt{6}}$$

인데 삼각함수의 합공식에 따라서

$$2\cos t + 2\sqrt{2}\sin t = 2\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cos t + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\sin t\right) = 2\sqrt{3}\cos(\alpha - t)$$

이다. 여기서 α 는 $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$이고, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$을 만족하는 실수이다.

$$-2\sqrt{3} - 6 \le 2\sqrt{3}\cos(\alpha - t) - 6 \le 2\sqrt{3} - 6 \le 0$$

이므로,

$$\frac{6 - 2\sqrt{3}}{\sqrt{6}} \le \frac{|2\cos t + 2\sqrt{2}\sin t - 6|}{\sqrt{6}} \le \frac{6 + 2\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$$

이다. 따라서 최단거리는

$$\frac{6 - 2\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} - \sqrt{2}$$

이다.

(별해) 평면 $x + z = 0$은 주어진 구의 중심을 지나고, 평면 $x + 2y - z = 6$ 과 수직이므로, 원과 평면 $x + 2y - z = 6$과의 최단 거리는 구의 중심에서 평면 $x + 2y - z = 6$ 까지의 거리에서 구의 반지름을 빼면 된다. 따라서 최단거리는 $\sqrt{6} - \sqrt{2}$ 이다.

문제 3 좌표평면 위를 움직이는 점 $P(x, y)$ 가 $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $0 < t < 2\pi$ 를 만족할 때, $\dfrac{dy}{dx} = 1$ 이 되는 t 는 $\boxed{}$이다.

[풀이]

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = 1$$

이므로

$$\sin t + \cos t = 1$$

이다. 즉, $\sqrt{2}\sin(t + \frac{\pi}{4}) = 1$이다. $0 < t < 2\pi$이므로, $t = \frac{\pi}{2}$이다.

문제 4 $0 \leqq a \leqq 2$ 일 때, 좌표평면의 곡선 $y = 1 + \dfrac{1}{x+1}$ 위의 점 (a, b) 에서 이 곡선에 접하는 접선과, x 축 및 y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 최대가 되는 a 의 값은 $\boxed{}$이다.

[풀이] 점 (a, b)에서 접선의 방정식은

$$y - \frac{a+2}{a+1} = -\frac{1}{(a+1)^2}(x - a)$$

이다. 즉,

$$y = \frac{-x + (a^2 + 4a + 2)}{(a+1)^2}$$

이다. 여기서 x 절편은 a^2+4a+2 이고, y 절편은 $\frac{a^2+4a+2}{(a+1)^2}$ 이므로 구하고자 하는 삼각형의 넓이 A는

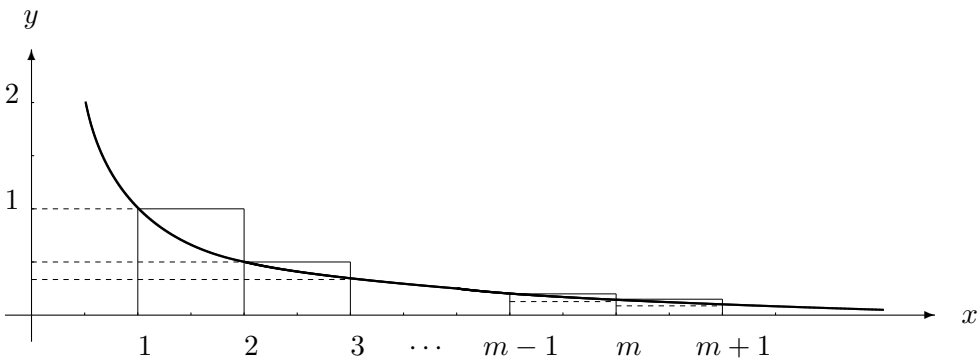
$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\left(\frac{a^2+4a+2}{a+1}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(a+3-\frac{1}{a+1}\right)^2 \end{aligned}$$

이다. $t=a+1$ 라 하면, $1 \le t \le 3$이고, $A=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}+2\right)^2$ 이다. $1 \le t \le 3$에서 $t-\frac{1}{t}+2t$ 는 양수이고 증가하므로 $t=3$ 일 때, 삼각형의 넓이가 최대가 된다. 따라서 $a=2$ 이다.

문제 5 다음의 극한값은 $\boxed{}$이다.

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\ln N}\sum_{n=1}^{N^2}\frac{1}{n}.$$

[풀이] 그림에서와 같이 $\ln m = \int_1^m \frac{1}{x}\,dx \le \sum_{n=1}^{m-1}\frac{1}{n}$ 이고, $\sum_{n=2}^{m}\frac{1}{n} \le \int_1^m \frac{1}{x}\,dx = \ln m$ 이므로



$$\frac{1}{m}+\ln m \le \sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n} \le \ln m+1$$

임을 알 수 있다. 그러므로

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\ln N}\left(\frac{1}{N^2}+\ln N^2\right) \le \lim_{N\to\infty}\frac{1}{\ln N}\sum_{n=1}^{N^2}\frac{1}{n} \le \lim_{N\to\infty}\frac{1}{\ln N}\left(\ln N^2+1\right)$$

이고,

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\ln N}\left(\frac{1}{N^2}+\ln N^2\right) = 2 = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{\ln N}\left(\ln N^2+1\right)$$

이므로,

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\ln N}\sum_{n=1}^{N^2}\frac{1}{n} = 2$$

이다.

문제 6　실수 전체 집합에서 정의된 세번 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 모든 정수 n 에 대하여 $f(n) = n^2$, $f'(n) = (n+1)^2$ 일 때

$$\int_0^1 (1-x)f''(2x)dx$$

의 값은 $\boxed{}$이다.

[풀이] 부분적분을 이용하여 다음을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}\int_0^1 (1-x)f''(2x)dx &= \left[\frac{1}{2}(1-x)f'(2x)\right]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 f'(2x)dx \\ &= -\frac{1}{2}f'(0) + \frac{1}{4}(f(2)-f(0)) \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\times 4 - \frac{1}{4}\times 0 \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

문제 7　좌표평면에서 반지름의 길이가 1 이고 중심이 y 축에 있는 원이 포물선 $y = 2x^2$ 에 두 점에서 접한다고 하자. 이때 두 접점의 좌표를 구하라.

[풀이] 이차방정식의 판별식 또는 미분을 이용하여 풀 수 있다.

(풀이 1) 원의 중심이 y축에 있으므로 원의 중심을 $C(0,c)$라고 하면 반지름의 길이가 1이므로 원의 방정식은 $x^2 + (y-c)^2 = 1$이다. 이제 포물선 $y = 2x^2$과 연립하여 보면, 다음과 같은 y에 관한 이차방정식을 얻는다 :

$$y^2 + (\frac{1}{2} - 2c)y + (c^2 - 1) = 0.$$

원과 포물선이 두 점에서 접할 때, 두 이차곡선은 y축에 대칭인 도형이기 때문에 위 이차방정식은 중근을 갖으며 판별식 D 는 0이 된다.

$$D = (\frac{1}{2} - 2c)^2 - 4(c^2 - 1) = -2c + \frac{17}{4} = 0$$

에서 $c = \frac{17}{8}$이고, 이 값을 위의 y에 관한 이차방정식에 대입하면 $y = \frac{15}{8}$을 얻는다. 따라서 두 접점의 좌표는 $(\frac{\sqrt{15}}{4}, \frac{15}{8}), (-\frac{\sqrt{15}}{4}, \frac{15}{8})$이다.

(풀이 2) 한 접점의 좌표를 $T(t, 2t^2)$이라 하면, 접점 T에서 포물선 $y = 2x^2$에 대한 법선의 방정식은

$$y - 2t^2 = -\frac{1}{4t}(x - t)$$

이다. 원의 반지름과 접선은 수직이므로, 이 법선은 원의 중심을 지나게 된다. 따라서 원의 중심 C의 좌표는 $(0, 2t^2 + \frac{1}{4})$이 된다. 이제 원의 반지름의 길이가 1임을 이용하면,

$$\overline{CT}^2 = (t-0)^2 + \{2t^2 - (2t^2 + \frac{1}{4})\}^2 = t^2 + \frac{1}{16} = 1$$

이다. 그러므로 접점의 x좌표는 $t = \pm\frac{\sqrt{15}}{4}$이고, 두 접점의 좌표는 $(\frac{\sqrt{15}}{4}, \frac{15}{8}), (-\frac{\sqrt{15}}{4}, \frac{15}{8})$이다.

(별해) 음함수 미분법을 활용해 원의 접선의 기울기를 구한 뒤, 원과 포물선이 접점 T에서 공통접선을 가짐을 이용하여 풀이할 수도 있다.

[채점기준]

- 명확한 풀이과정과 답이 있어야 13점 만점. 풀이과정이 없으면 답이 옳더라도 0점 처리.
- (풀이 1)에서 원의 중심의 좌표까지 옳게 구한 경우와 (풀이 2)에서 원의 중심에 대한 식을 옳게 구한 경우는 8점.
- 접점 2개를 모두 구하지 못하고 1개만 구한 경우와 서술과정에서 논리적 근거가 부족한 경우는 3점을 감점.

[채점소감]

서술형 문제는 반드시 논리적인 풀이과정을 명시해야 한다. 따라서 풀이과정 없이 답만 적어놓으면 점수를 받을 수 없다. 이러한 원칙은 이후 대학에 들어와 수학 시험을 보는 과정에서도 그대로 지켜지기 때문에, 대학에 첫발을 내딛는 신입생들은 반드시 유념해야할 것이다. 한편 풀이과정이 있기는 하지만 그 서술이 논리적이지 못하거나 너무 소략적이어서 논리의 전개과정을 파악하기 어려운 경우가 많은데, 수학 답안은 논리정연하게 답이 나오는 과정을 제시해야 한다.

많은 학생들이 잘 풀었지만, 판별식 및 이차방정식을 잘못 풀어서 틀린 경우가 상당수 있었다. 그리고 음함수를 양함수로 바꾸는 과정에서 오류가 있거나 음함수의 미분법을 잘못 사용한 경우도 있었다.

문제 8 좌표공간에서 두 점 $P(3,1,2), Q(-3,4,3)$ 과 평면 $x+2y+z=1$ 위의 점 R에 대하여, $\overline{PR}+\overline{QR}$의 최소값을 구하라.

[풀이] $3+2\cdot 1+2>1$, $-3+2\cdot 4+3>1$ 이므로 점 P와 점 Q가 주어진 평면을 경계로 하는 같은 반공간의 점임을 확인한다. 점 P의 평면에 대한 대칭점을 $P'(a,b,c)$라 두면, 점$(\frac{3+a}{2}, \frac{1+b}{2}, \frac{2+c}{2})$는 평면 위의 점이므로 평면의 식에 대입하면 $a+2b+c=-5$를 만족한다. 또한 선분 PP' 는 평면과 수직임으로 0이 아닌 실수 t 에 대하여

$$(a-3, b-1, c-2) = t(1,2,1)$$

가 된다. 따라서 $P' = (3+t, 2t+1, t+2)$ 가 되어, $a=1, b=-3, c=0$이다.

$$PR+QR = P'R+QR$$

이고 삼각 부등식에 의해서

$$P'R+QR \geq P'Q$$

임을 알수 있다. 따라서 최소값은 $\overline{QP'} = \sqrt{(-4)^2 + 7^2 + 3^2} = \sqrt{74}$이다.

[채점기준]

- 삼각 부등식의 개념 설명에 대하여 3점.
- 점 P 의 대칭점 $P' = (1, -3, 0)$ 이나 점 Q의 대칭점 $Q' = (-\frac{16}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$을 찾는 것에 대하여 5점.
- 최단거리를 맞게 계산 한경우 5점.
- 계산 실수는 3점 감점.

[채점소감]

대부분의 학생들이 잘 풀었으나 일부 학생들은 대칭점을 제대로 구하지 못하거나 최소거리를 계산 하지 못한 학생이 있었다. 또한 사소한 계산 실수로 감점을 받은 학생이 의외로 많았다. 고등학교 과정의 공부를 한 학생이라면 이 문제를 푸는데 필요한 내용은 생소한 것이 아닐 텐데 평면에 대한 대칭이나 삼각부등식의 내용 등에 대한 이해가 부족하여 답안 작성에 어려움을 겪은 것 같다.대체적으로 서술형 문제의 답안 작성방법이 서툴러서 논리적 사고와 훈련의 필요성을 느꼈다.

문제 9 두 실수 x, y 가 $x > y \geqq 1$ 일 때, 부등식

$$\ln x - \ln y < x - y$$

가 성립하는지 또는 아닌지를 밝히라.

[풀이] (풀이1) $f(t) = \ln t$라 하자. 그러면 f는 구간 $[y, x]$에서 연속이고 (y, x)에서 미분이 가능하므로 평균값 정리에 의해 $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(c)$를 만족하는 c가 (y, x)에 존재한다. $f'(c) = \frac{1}{c} < 1$이므로 부등식이 성립한다.
(풀이2) $f(t) = \ln t - t$라 하자. 그러면 $f'(t) = \frac{1}{t} - 1$이다. $t \geq 1$일때 $f'(t) \leq 0$이므로 f는 구간 $[0, \infty)$에서 순감소하므로 $f(x) < f(y)$이다.

[채점기준]

- 평균값 정리에 대한 내용 언급 5점.
- 계산 실수나 용어의 혼동은 3점 감점.

[채점소감]

대체로 잘 풀었으나 간혹 이해가 부족하여 풀이 흐름이 맞지 않거나, 또는 평균값 정리를 알고 있으나 논리적으로 적용하지 못해 풀이를 다 하지 못한 학생들이 있었다.

문제 10 좌표평면에서 동점 $(x(t), y(t))$ 가 원점 $(0, 0)$ 을 바라보는 방향과 항상 $60°$ 를 유지하면서 점 $(10, 0)$ 에서 출발하여 원점에 도달할 때까지 매초 $\frac{1}{2}$의 일정한 속력으로 움직인다고 하자.

(a) 점 $(x(t), y(t))$ 가 출발 후 원점에 도달하는데 걸리는 시간을 구하라.

(b) $y'(0) > 0$ 라고 할 때 시각 t 에서 $(x(t), y(t))$ 를 구하라.

[풀이] (a) 원점쪽으로의 속력은 $\frac{1}{2}\cos 60^\circ = \frac{1}{4}$이므로 시각 t에서 원점으로부터의 거리 $r(t)$는 $r(t) = 10 - \frac{1}{4}t$로 주어진다. 따라서 정확히 40초 후에 원점에 도달한다.

(b) 시각 t에서 점의 위치 $(x(t), y(t))$를

$$(x(t), y(t)) = \left((10 - \frac{1}{4}t)\cos f(t), (10 - \frac{1}{4}t)\sin f(t)\right)$$

라고 두고 미분하여 속력을 구하면

$$\sqrt{\frac{1}{16} + (10 - \frac{1}{4}t)^2 f'(t)^2} = \frac{1}{2}$$

이므로 $f'(t) = \pm\frac{\sqrt{3}}{40-t}$가 되고 $y'(0) > 0$ 이므로 $f'(t)$ 는

$$f'(t) = \frac{\sqrt{3}}{40-t}$$

이다. 이를 적분하면

$$f(t) = -\sqrt{3}\ln|40-t| + C$$

이고, $t = 0$이면 $\theta = 0$ 이므로 $f(t)$ 는

$$f(t) = -\sqrt{3}\ln|40-t| + \sqrt{3}\ln 40$$

이 된다. 그러므로

$$(x(t), y(t)) = \left(\frac{40-t}{4}\cos\left(\sqrt{3}\ln\frac{40}{|40-t|}\right), \frac{40-t}{4}\sin\left(\sqrt{3}\ln\frac{40}{|40-t|}\right)\right)$$

이다.

[채점기준]

- 계산실수는 4점 감점.
- (a) 5점, (b) 8점.

[채점소감]

많은 학생들이 문제를 이해하지 못하여 답안 작성을 하지 못했다. 간혹 문제를 이해하고도 풀이를 수식으로 표현하지 못한 학생이 있는 것이 안타까웠다. 또한 표기방식이나 계산에서 실수를 하여 감점을 받은 학생들도 꽤 있었다.