2008 수학성취도 평가시험

(2008학년도 정시 입학생)

2008년 2월 20일, 고사시간 90분

- 1번부터 6번까지는 단답형이고, 7번부터 10번까지는 서술형입니다.
- 답안지는 깨끗한 글씨로 바르게 작성하되, 단답형은 답만 쓰고, 서술형은 풀이과정과 답을 명시하시오.
- 총 배점은 100점이고, 각 문항의 배점은 단답형은 8점(무답 2점, 오답 0점), 서술형은 13점입니다.

문제 1 각 변의 길이가 1인 정사면체 $ABCD$ 에서, N이 선분 AD의 중점일 때, 벡터의 내적 $\overrightarrow{CN} \cdot \overrightarrow{CB}$ 는 $\boxed{}$이다.

[풀이] 각 NCB를 θ라고 하자. $\triangle NBC$가 이등변 삼각형이고, $\overline{NB} = \overline{NC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\overline{BC} = 1$ 이므로, $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$이다. 따라서

$$\overrightarrow{CN} \cdot \overrightarrow{CB} = \overline{CN} \cdot \overline{CB} \cdot \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

이다.

(별해) 코사인 제2법칙을 이용하여

$$\overrightarrow{CN} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}(\overline{BC}^2 + \overline{CN}^2 - \overline{NB}^2) = \frac{1}{2}$$

임을 알 수 있다.

문제 2 좌표공간에서 점 (1,1,1)이 중심이고 반지름의 길이가 1인 구와 평면 $2x + y + 2z = 14$ 의 최단거리는 $\boxed{}$이다.

[풀이] 원점과 평면 $2x + y + 2z = 14$ 의 거리

$$\frac{|2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 14|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = 3$$

에서 1을 뺀 거리이므로 답은 2이다.

문제 3 구간 $[0, 2\pi]$ 에서 부등식

$$\cos x \leqq \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + \sin(2x)} - \sqrt{1 - \sin(2x)}\right)$$

를 만족시키는 x의 범위는 $\boxed{}$이다.

[풀이] 우변을 제곱하면

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{4}\left(\sqrt{1+\sin(2x)}-\sqrt{1-\sin(2x)}\right)^2 &= \frac{1}{4}\left(2-2\sqrt{1-\sin^2(2x)}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1-|\cos(2x)|\right) \\
&= \begin{cases} \cos^2 x & \frac{\pi}{4} \le x \le \frac{3\pi}{4} \text{ 또는 } \frac{5\pi}{4} \le \frac{7\pi}{4} \\ \sin^2 x & \text{나머지구간} \end{cases}
\end{aligned}
$$

이다. 그러므로 우변은 구간에따라 다음과 같다.

구간	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{7\pi}{4}$		2π
우변		$\sin x$			$\cos x$				$-\sin x$				$-\cos x$			$\sin x$	

이제 우변과 좌변을 비교하면 만족하는 구간은 $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}]$ 이다.

문제 4 좌표평면에서 식 $|x|^{\frac{2}{3}}+|y|^{\frac{2}{3}}=1$ 로 주어진 곡선의 길이는 $\boxed{}$이다.

[풀이] $x=\cos^3 t,\ y=\sin^3 t\ (0 \le t \le 2\pi)$로 치환하면 길이 ℓ은

$$\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cdot\frac{1}{2}\sin 2t\, dt = 6$$

이다.

문제 5 극한값

$$\lim_{n\to\infty}\left[\ln\{n(n+1)\cdots(n+n)\}^{\frac{1}{n}}-\ln n\right]$$

은 $\boxed{}$이다.

[풀이]

$$
\begin{aligned}
& \lim_{n\to\infty}\left[\ln\{n(n+1)\cdots(n+n)\}^{\frac{1}{n}}-\ln n\right] \\
= & \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\ln\{n(n+1)\cdots(n+n)\}-n\ln n\right] \\
= & \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n})+\ln n\right] \\
= & \int_1^2 \log x dx + \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n} \\
= & 2\log 2 - 1
\end{aligned}
$$

이다.

문제 6 함수 $h(x)$ 는 $h(0)=0$ 이며 $h'(0)=1$ 이다. 실수 전체 집합에서 정의된 연속함수 $f(x)$ 가 π 의 배수가 아닌 x 에 대하여

$$f(x)=h(x)\frac{3^x-1}{(\sin x)^2}$$

이면 $f(0)$ 의 값은 $\boxed{}$ 이다.

[풀이]

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0}\frac{h(x)-h(0)}{x}\cdot\frac{3^x-3^0}{x}\cdot\frac{x^2}{(\sin x)^2}\\ &= h'(0)\cdot\ln 3\cdot 1\\ &= \ln 3\end{aligned}$$

이다.

문제 7 포물선 위의 서로 다른 두 점을 A, B 라 하고, 이 두 점에서 각각 그은 접선이 서로 만나는 점을 C 라 하자. 선분 AB 의 중점을 M 이라 하고, 선분 MC 의 중점을 N 이라 할 때, N 은 포물선 위의 점인지 아닌지를 밝히라.

[풀이] 포물선의 방정식을 $y=ax^2$ 이라고 해도 일반성을 잃지 않는다. 이제 점 A, B 의 x 좌표를 각각 x_1, x_2 라고 하면 $A(x_1, ax_1^2)$, $B(x_2, ax_2^2)$ 이 된다. 두 점 A, B 에서 접하는 직선의 방정식은 각각 다음과 같다.

$$y=2ax_1(x-x_1)+ax_1^2=2ax_1x-ax_1^2$$
$$y=2ax_2(x-x_2)+ax_2^2=2ax_2x-ax_2^2$$

두 식을 연립하여 C 의 좌표를 구해보면 $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, ax_1x_2\right)$ 이다. 한편 M 은 A와 B 의 중점이므로 $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{a(x_1^2+x_2^2)}{2}\right)$ 이다. 따라서 N의 좌표는

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}(x_1+x_2)^2\right)\right)=\left(\frac{x_1+x_2}{2}, a\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2\right)$$

이다. 그러므로 N 은 포물선 $y=ax^2$ 위에 있다.

[채점기준]

- C 의 좌표를 올바르게 구하면 6점
- N 의 좌표를 올바르게 구하여 포물선 위의 점임을 확인하면 13점.

[채점소감]

처음에 임의로 주어진 포물선을 $y=ax^2$ 나 $x=ay^2$ 로 두어도 일반성을 잃지 않는다는 것을 알면 쉽게 풀 수 있는 문제로 많은 학생들이 올바르게 풀었다. 포물선 $y=x^2$ 을 가정해 놓고 문제를 풀어도 일반성을 잃지 않지만 모든 포물선이 닮은꼴이라는 언급을 분명히 한 학

생은 적었다. 또한 많은 학생들이 논리적으로 부족한 답안이 많이 있었는데 답안을 논리적으로 작성하는 연습을 좀 더 많이 했으면 하는 바램이다.

문제 8 실수 전체 집합에서 정의된 함수 f 가 모든 실수 x, y 에 대하여

$$|f(x) - f(y)| \leqq 2|x - y|^{\frac{4}{3}}$$

라고 하자. 이때 함수 f 는 상수함수인지 아닌지를 밝히라.

[풀이] $x \neq y$인 두 실수 x, y에 대해서, 문제의 식을 $|x - y|$로 나누면

$$\left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| \leq 2|x - y|^{1/3}$$

을 얻는다. 따라서

$$-2|x - y|^{1/3} \leq \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq 2|x - y|^{1/3}$$

이 성립한다.

고정된 임의의 실수 y에 관해서, x가 y로 다가갈 때, 위의 부등식의 양변은 0으로 수렴하게 된다. 따라서 f가 y에서 미분가능하고, 미분값은 0이 된다. 임의의 실수 y에 대하여 $f'(y) = 0$이므로, f는 상수함수이다.

[채점기준]

- 함수의 미분가능성이나 도함수의 연속성을 가정하고 푼 경우 8점.
- 부호, 절대값 등의 사소한 계산실수가 있을 경우 5점 감점.

[채점소감]

대부분의 학생들이 문제를 잘 풀었지만, 논리적인 부분은 많이 취약했다. 문제에서 f의 미분가능성에 대한 언급이 없었으므로, f가 미분가능하다는 것을 직접 증명해야했다. 또한 처음부터 평균값 정리를 이용해서 $f'(c) = \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}$ 인 c가 존재함을 써서 문제를 풀려고 한 학생들이 있었지만, 도함수가 연속인지 알지 못하므로 사용할 수 없는 풀이이다.(고등학교과정에서는 도함수가 연속이 아닌 경우가 없었지만, 이는 일반적으로 성립하는 명제가 아니다.) 전체적으로 풀이과정에서의 논리적인 연결이 매끄럽지 못하는 경우가 많다. 학생들에게 자신의 생각을 답안으로 표현하는 훈련이 필요한 것 같다.

문제 9 좌표평면에서 점 P, Q, R 의 좌표는 시각 t 에 따라 다음과 같이 주어진다:

$$\begin{aligned} P(t) &= (\cos \pi t, \sin \pi t) \\ Q(t) &= (1 - 2t, 0) \\ R(t) &= (1 - 2t, 1) \end{aligned}$$

시각이 t 일 때 원점 O 와 점 P 를 연결한 선분 OP 가 선분 QR 과 교차하는 점의 좌표를 $(x(t), y(t))$ 라고 하자. 이때 극한값 $\lim_{t\to\frac{1}{2}} y(t)$ 가 존재하는지 설명하고 존재한다면 그 값을 구하라.

[풀이] 교점은 두 직선 $y = \tan(\pi t)x$, $x = 1-2t$ 위에 있으므로 교점은 $y(t) = \tan(\pi t)(1-2t)$ 이다. 따라서,

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 1/2} y(t) &= \lim_{t\to 1/2} \frac{\sin(\pi t)}{\cos(\pi t)}(1-2t) \\ &= \lim_{t\to 1/2} \frac{\pi\cos(\pi t) - 2\sin(\pi t)}{-\pi\sin(\pi t)} \quad (\because \text{로피탈 정리}) \\ &= \frac{2}{\pi}\end{aligned}$$

가 되어 극한값은 존재하고 극한값은 $\frac{2}{\pi}$ 이다.

[채점기준]

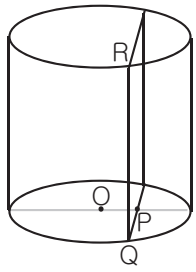
- 극한값이 존재한다는 사실을 보이는데 5점.
- 극한을 올바르게 계산하는데 8점.

[채점소감]

대부분의 학생이 극한값을 잘 구했으나 계산실수로 인해 틀린 학생도 일부 있었다.

문제 10 밑면의 반지름의 길이가 a, 높이가 h 인 직원기둥을, 그 밑면의 한 지름을 축으로 하여 회전시킬 때 생기는 입체의 부피를 구하라.

[풀이] 직원기둥 밑면의 중심 O를 원점으로, 밑면의 한 지름을 품는 직선을 x축으로 하자.



그리고 x축 위의 임의의 점 $P(t, 0, 0)$ $(-a \le t \le a)$를 지나며 x축에 수직인 평면으로 직원기둥을 자른 단면이 원기둥의 밑면과 윗면의 모서리와 만나는 점을 각각 Q, R이라 하자.
점 Q는 반지름이 a인 원 위의 점이므로 $\overline{PQ} = \sqrt{a^2 - t^2}$이고, 피타고라스 정리에 의하여 $\overline{PR} = \sqrt{\overline{PQ}^2 + \overline{QR}^2} = \sqrt{(a^2 - t^2) + h^2}$이다.

$x = t$에서 x축에 수직인 평면으로 회전체를 자른 단면은 $\overline{PR}$을 반지름으로 하는 원이므로, 단면의 넓이는 $S(t) = \pi\overline{PR}^2 = \pi(a^2 + h^2 - t^2)$이다. 따라서 회전체의 부피는

$$\begin{aligned} V &= \int_{-a}^{a} S(t)dt = \int_{-a}^{a} \pi(a^2 + h^2 - t^2)dt = 2\pi \int_{0}^{a} (a^2 + h^2 - t^2)dt \\ &= 2\pi\left\{a(a^2 + h^2) - \frac{1}{3}a^3\right\} = 2\pi a\left(\frac{2}{3}a^2 + h^2\right). \end{aligned}$$

[채점기준]

- 회전체의 부피를 구하는 식만 있고, 이에 대한 계산이 전혀 없는 경우는 5점.
- 부피를 구할 때 π가 없는 경우와 회전체 절반 만의 부피를 구한 경우, 사소한 계산 실수가 있는 경우는 각 3점씩 감점.
- 회전체의 겉면이 구의 일부분임을 충분히 설명하지 않은 경우는 5점 감점.

[채점소감]

직원기둥의 회전체가 다시 원기둥이 된다고 오해하거나 회전체의 형태를 잘못 파악한 학생들이 다수 있었다. 직관적으로 파악하기 어려운 회전체의 부피를 구하기 위해서는 회전체의 단면을 꼼꼼히 살펴보는 것이 필요하다. 한편 충분한 논리적 근거 없이 성급한 결론을 내리는 답안이 또한 많이 있었다. 수학 답안은 단지 수식과 답만으로 구성되는 것이 아니라, 충분한 논리적 근거 제시와 논리정연한 논의 전개를 통해 답을 이끌어내는 과정이 담겨있어야만 한다.