2009학년도 수학성취도 측정시험

(2009학년도 수시모집 합격생 대상)

2008년 12월 18일, 고사시간 90분

- 1번부터 6번까지는 단답형이고, 7번부터 10번까지는 서술형입니다.
- 답안지는 깨끗한 글씨로 바르게 작성하되, 단답형은 답만 쓰고, 서술형은 풀이과정과 답을 명시하시오.
- 총 배점은 100점이고, 각 문항의 배점은 단답형은 8점(무답 2점, 오답 0점), 서술형은 13점입니다.

문제 1 좌표공간에서 세 점 $A(1,1,1)$, $B(0,2,3)$, $C(1,3,4)$ 을 지나는 평면과 방정식 $x+y-2z=1$ 로 주어진 평면이 이루는 각 가운데 예각의 코사인 값은 $\boxed{}$ 이다.

[풀이] 답: $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$

점 A, B, C 를 지나는 평면의 법선벡터는 두 벡터 $\overrightarrow{AB}=(-1,1,2)$, $\overrightarrow{AC}=(0,2,3)$ 에 수직이므로, 벡터 $\overrightarrow{a}=(1,-3,2)$ 와 평행함을 알 수 있다. 또한 평면 $x+y-2z=1$ 의 법선벡터는 $\overrightarrow{b}=(1,1,-2)$ 이므로,

$$\cos\theta = \frac{|\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}|}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|} = \frac{6}{\sqrt{14}\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

문제 2 점 $(4,-\frac{1}{2})$ 에서 포물선 $y=x^2$ 에 이르는 최단거리는 $\boxed{}$ 이다.

[풀이] 답: $\dfrac{3}{2}\sqrt{5}$

점 $(4,-\frac{1}{2})$ 에서 포물선 $y=x^2$ 위의 점 (t,t^2) 까지의 거리는

$$L(t)=\sqrt{(t-4)^2+\left(t^2+\frac{1}{2}\right)^2}$$

이다. 계산의 편의를 위하여 거리를 제곱한 함수

$$f(t):=L(t)^2=(t-4)^2+\left(t^2+\frac{1}{2}\right)^2=t^4+2t^2-8t+\frac{65}{4}$$

를 생각하자. 함수 $f(t)$ 를 미분하여 계산하면, $f'(t)=4t^3+4t-8=4(t-1)(t^2+t+2)$ 이므로 $t=1$ 일 때 $f(t)$ 는 최솟값 $\dfrac{45}{4}$ 을 가진다. 따라서 구하는 최단거리는 $\dfrac{3}{2}\sqrt{5}$ 이다.

문제 3 타원 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 위의 점 (a,b) 에서 이 타원에 수직인 직선이 x축과 만나는 점은 $\boxed{}$ 이다. 단 $b\neq 0$.

[풀이] 답: $\left(\frac{3}{4}a, 0\right)$

타원 위의 점 (a, b) 에서 법벡터는 $\left(\frac{a}{4}, b\right)$ 이다. 그러므로 구하는 직선의 방정식은

$$(a, b) + t\left(\frac{a}{4}, b\right)$$

이다. 이 직선이 x축과 만나는 때는 $t = -1$ 일 때 이고, 따라서 이때 x좌표는 $a - \frac{a}{4} = \frac{3}{4}a$ 이다.

문제 4 $\lim_{A\to\infty} \int_0^A x^2 e^{-x}\, dx = \boxed{}$.

[풀이] 답: 2

부분적분법으로 계산하면,

$$\int_0^A x^2 e^{-x} dx = -e^{-A}(A^2 + 2A + 2) + 2.$$

그런데 $\lim_{A\to\infty} e^{-A} = 0$, $\lim_{A\to\infty} Ae^{-A} = 0$, $\lim_{A\to\infty} A^2 e^{-A} = 0$ 이므로, $\lim_{A\to\infty} \int_0^A x^2 e^{-x} dx = 2$.

문제 5 길이가 2 인 선분 L 을 지름으로 하는 원에서 L 과 직교하며 또한 L 을 n 등분하는 현 $n-1$ 개의 길이의 평균을 A_n 이라 하면, $n \to \infty$ 일 때 A_n 의 극한은 $\boxed{}$ 이다.

[풀이] 답: $\frac{\pi}{2}$

지름 L 을 n 등분하는 현 중 k 번째 현의 길이를 l_k (k=$1, 2, \cdots, n-1$) 라 하자.

지름이 2 인 원의 넓이는 π 이므로 구분구적법에 의해서,

$$\lim_{n\to\infty} (l_1 + l_2 + \cdots + l_{n-1})\frac{2}{n} = \pi$$

임을 알 수 있다. $S_n := l_1 + l_2 + \cdots + l_{n-1}$ 으로 놓으면, $\lim_{n\to\infty} S_n \frac{2}{n} = \pi$ 으로부터 구하는 극한값은

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-1} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} S_n \frac{n}{2(n-1)} = \frac{\pi}{2}.$$

(별해) 원에서의 비례 관계로부터 $\left(\frac{l_k}{2}\right)^2 = \frac{2}{n}k\left(2 - \frac{2}{n}k\right)$ 인 관계를 얻을 수 있다. 따라서 현 $n-1$ 개의 길이의 평균은

$$A_n = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} l_k = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} 2\sqrt{\frac{2k}{n}\left(2 - \frac{2k}{n}\right)}$$

이고,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} A_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} 2\sqrt{\frac{2k}{n}\left(2-\frac{2k}{n}\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n-1}\cdot\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{2k}{n}\left(2-\frac{2k}{n}\right)} \\
&= \int_0^2 \sqrt{x(2-x)}\,dx = \int_0^2 \sqrt{1-(1-x)^2}\,dx \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \cos\theta(-\cos\theta\,d\theta) \quad (x = 1-\sin\theta \text{ 로 치환하여 적분}) \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,d\theta = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

문제 6 좌표공간에서 반지름이 $1/2$ 이고 중심이 각각 $O(0,0,0)$, $A(1,2,-1)$, $B(2,1,1)$, $C(1,0,-3)$ 인 네 개의 구에 공통으로 외접하는 구의 중심은 $\boxed{}$ 이고, 반지름은 $\boxed{}$ 이다.

[풀이] 답: 중심: $(2,0,-1)$ 반지름: $\sqrt{5}-\frac{1}{2}$

구하는 원의 중심을 (a,b,c) 라 하면,

$$\begin{aligned}
a^2+b^2+c^2 &= (a-1)^2+(b-2)^2+(c+1)^2 \\
&= (a-2)^2+(b-1)^2+(c-1)^2 \\
&= (a-1)^2+b^2+(c+3)^2
\end{aligned}$$

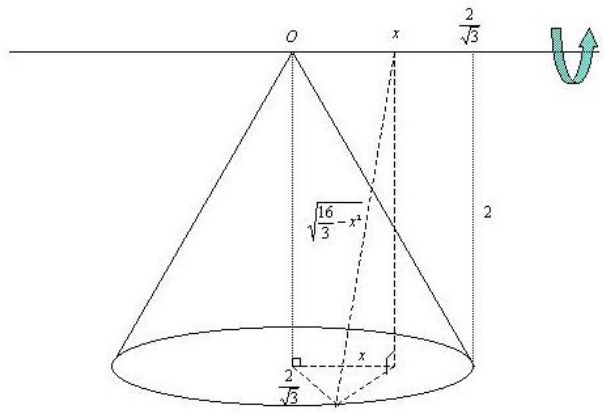
이다. 이를 연립하여 풀면 $a=2$, $b=0$, $c=-1$ 이 되고, 구하는 반지름은 $\sqrt{5}-\frac{1}{2}$ 이다.

(단, 구의 반지름을 $\sqrt{5}+\frac{1}{2}$ 이라고 답한 경우에도 점수를 부여하였다.)

문제 7 반지름이 $\frac{2}{\sqrt{3}}$ 이고 높이가 2인 직원뿔을 꼭지점을 지나고 밑면에 평행한 직선의 둘레로 회전시켜 얻은 입체의 부피를 구하시오.

[풀이] 답 : $\frac{128\sqrt{3}}{27}\pi$

직원뿔의 꼭지점을 원점으로 놓자. 직원뿔을 회전시켰을 때 얻은 입체는 축으로부터 가장 멀리 있는 부분을 회전하여 얻은 회전체에서 가장 가까이에 있는 부분을 회전하여 얻은 회전체를 제외해 주면 얻게 된다. 그림과 같이 위치 x 에서 회전축에 수직인 평면으로 도형을 절단하였을 때 축에서 가장 먼 거리에 있는 점까지의 거리는 $\sqrt{\frac{16}{3}-x^2}$ 이고, 가장 가까운 거리는 $\sqrt{3}\,x$ 이다. 이제 이것을 $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ 에서 $\frac{2}{\sqrt{3}}$ 까지 회전시킨 회전체의 부피를 구하면 된다.



그러므로

$$V = \pi \int_{-\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \left\{ \left(\sqrt{\frac{16}{3} - x^2} \right)^2 - (\sqrt{3}\, x)^2 \right\} dx \;=\; \frac{128\sqrt{3}}{27}\pi$$

[채점기준] 축에서 가장 먼 거리에 있는 거리 $\sqrt{\frac{16}{3} - x^2}$ 를 구하는 것에 6점을 주고, 가장 짧은 거리에서 축을 회전시켜 입체를 구한 것에 4점, 마지막으로 회전체의 부피를 구해서 정확한 값을 구하는 것에 3점을 부여하였다.

[채점소감] 비교적 많은 학생들이 문제를 정확히 풀었다. 문제의 핵심은 피타고라스 정리를 이용하여 축으로부터 가장 먼거리를 구하는 것이다. 많은 학생들이 삼각형을 회전한 것과 부피가 같다고 착각했다. 한편 적분계산 과정에서 실수가 많았고, 구간을 $[0, 1]$ 로 잘못 파악한 경우도 있었다.

문제 8 좌표평면에 주어진 세 점 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$ 에 대해서

$$y_1 \le y_2 \le y_3$$

및

$$|y_i - y_j| \ge |x_i - x_j| \qquad (i, j = 1, 2, 3)$$

이 성립한다. 이 때

$$\overline{P_iP_j} = \sqrt{(y_i - y_j)^2 - (x_i - x_j)^2}$$

으로 정의하면,

$$\overline{P_1P_3} \ge \overline{P_1P_2} + \overline{P_2P_3}$$

이 성립함을 증명하시오.

[풀이] $a_i,\ b_i\ (i = 1, 2)$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$a_1 := y_2 - y_1,\ a_2 := y_3 - y_2,\ b_1 := x_2 - x_1,\ b_2 := x_3 - x_2$$

그러면 $a_1 + a_2 = y_3 - y_1,\ b_1 + b_2 = x_3 - x_1$ 이다.
그리고 가정에 의해 $a_1 \geq 0,\ a_1 \geq |b_1|,\quad a_2 \geq 0,\ a_2 \geq |b_2|$ 이고, $\overline{P_1P_3},\ \overline{P_1P_2},\ \overline{P_2P_3}$ 가 모두 음이 아닌 실수임을 쉽게 알 수 있다. 따라서 다음이 성립한다.

$$\overline{P_1P_3} \geq \overline{P_1P_2} + \overline{P_2P_3}$$

$$\iff \sqrt{(y_3 - y_1)^2 - (x_3 - x_1)^2} \geq \sqrt{(y_2 - y_1)^2 - (x_2 - x_1)^2} + \sqrt{(y_3 - y_2)^2 - (x_3 - x_2)^2}$$

$$\iff \sqrt{(a_1 + a_2)^2 - (b_1 + b_2)^2} \geq \sqrt{a_1^2 - b_1^2} + \sqrt{a_2^2 - b_2^2}$$

$$\iff (a_1 + a_2)^2 - (b_1 + b_2)^2 \geq (a_1^2 - b_1^2) + (a_2^2 - b_2^2) + 2\sqrt{a_1^2 - b_1^2}\sqrt{a_2^2 - b_2^2}$$

($\because$ 양변이 모두 양수이므로.....) ——— $(*)$

$$\iff 2a_1a_2 - 2b_1b_2 \geq 2\sqrt{(a_1^2 - b_1^2)(a_2^2 - b_2^2)}$$

$$\iff (a_1a_2 - b_1b_2)^2 \geq (a_1^2 - b_1^2)(a_2^2 - b_2^2)$$

($\because \quad a_1 \geq |b_1| \quad and \quad a_2 \geq |b_2|, \quad a_1a_2 - b_1b_2 \geq 0$) ——— $(**)$

$$\iff a_1^2a_2^2 - 2a_1a_2b_1b_2 + b_1^2b_2^2 \geq a_1^2a_2^2 - a_1^2b_2^2 - b_1^2a_2^2 + b_1^2b_2^2$$

$$\iff a_1^2b_2^2 - 2a_1a_2b_1b_2 + a_2^2b_1^2 \geq 0$$

$$\iff (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \geq 0$$

$$\therefore\ \overline{P_1P_3} \geq \overline{P_1P_2} + \overline{P_2P_3}$$

[채점기준]

1. 오류가 없이 끝까지 완벽하게 맞으면 13점.
2. $(**)$부분이 없으면 5점 감점.
3. 이외 유사답안에서도 $(**)$부분에 대한 언급이 없으면 5점 감점.

[채점소감] 많은 학생들이 $(**)$부분을 언급하지 않아서 감점을 당했다. 서술형 문제는 반드시 논리적인 풀이 과정을 명시해야 한다. 대학에서 보는 교양 수학 시험은 문제에 특별한 언급이 없는 한 모든 문제에 풀이 과정을 명시해야 한다. 비록 계산 문제일지라도 논리적인 계

산 과정을 보여야 하며 정확한 값을 이끌어 내야 한다. 신입생들은 수학 답안을 작성할 때는 논리적인 전개와 정확한 계산이 필요함을 잊지 말아야 한다. 마지막으로 당연해 보이더라도 과연 그것이 정말 당연한지 한 번쯤 생각하길 바란다.

문제 9 함수 $y = f(x)$ 가 구간 $[0,1]$ 에서 연속이고, 이 구간에 속한 모든 x 에 대해서

$$f(x)^3 - 2f(x)^2 - f(x) + 2 \geq 0$$

이 성립한다. 이 때, $f(0) = 0$ 이면, 구간 $[0,1]$ 에 속한 모든 x 에 대해서

$$-1 \leq f(x) \leq 1$$

이 성립함을 증명하시오.

[풀이] 함수 $f(x)$ 는 모든 x 에 대하여 다음 부등식을 만족한다.

$$f(x)^3 - 2f(x)^2 - f(x) + 2 = (f(x)+1)(f(x)-1)(f(x)-2) \geq 0.$$

따라서 $-1 \leq f(x) \leq 1$ 또는 $f(x) \geq 2$ 이다.
이제 $f(x_0) \geq 2$ 를 만족하는 $x_0 \in (0,1]$ 에 존재한다고 가정하자. 그러면 $f(x)$ 가 폐구간 $[0,1]$ 에서 연속이고 $f(0) = 0$ 이므로 중간값정리에 의해서 $f(x_1) = \dfrac{3}{2}$ 를 만족하는 $x_1 \in (0, x_0)$ 가 존재한다. 이 x_1 에 대하여

$$(f(x_1)+1)(f(x_1)-1)(f(x_1)-2) = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) < 0$$

이므로 모순이다. 따라서 $f(x) \geq 2$ 을 만족하는 $x \in [0,1]$ 는 존재하지 않는다. 그러므로 구간 $[0,1]$ 에 속한 모든 x 에 대해서

$$-1 \leq f(x) \leq 1$$

이다.

[채점기준]
1. 주어진 부등식을 풀어서 $f(x)$ 가 $-1 \leq f(x) \leq 1$ 또는 $f(x) \geq 2$ 이라는 것을 보이면 5점.
2. $f(x) \geq 2$ 를 만족하는 $x \in [0,1]$ 가 없다는 것을 정확히 보이면 8점.

[채점소감] 대부분의 학생들이 주어진 부등식을 이용하여 정확히 $f(x)$ 가 만족해야하는 두 개의 부등식을 구했고, 중간값정리를 이용하여 $-1 \leq f(x) \leq 1$ 이라는 것을 정확히 보였다. 하지만 주어진 부등식을 인수분해를 못하거나 인수분해를 해 놓고 전혀 엉뚱한 방법으로 $f(x)$ 의 범위를 구하려고 시도를 하다 틀린 학생들이 있었다. 이런 학생들은 좀더 충실히 고등학교 과정을 다시 복습해야 할 것이다.

문제 10 함수 $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$ 가 다음과 같이 귀납적으로 정의되었다.

$$f_1(x) = \sin x + \cos 4x, \quad f_{n+1} = x \int_{\pi}^{x} f_n(t)\, dt + f_n(x)^2.$$

수열 $\{f_n'(\pi)\}$ 의 일반항 $f_n'(\pi)$ 를 구하시오.

[풀이] 답: $f_n'(\pi) = (\pi - 1)2^{n-1} - \pi$

$f_1'(x) = \cos x - 4\sin 4x$ 이므로

$$f_1'(\pi) = -1. \tag{1}$$

$f_{n+1}'(x) = \displaystyle\int_\pi^x f_n(t)dt + xf_n(x) + 2f_n(x)f_n'(x)$ 이므로

$$f_{n+1}'(\pi) = \pi f_n(\pi) + 2f_n(\pi)f_n'(\pi). \tag{2}$$

인 점화식을 얻는다. 한편 $f_{n+1}(\pi) = \pi \displaystyle\int_\pi^\pi f_n(t)dt + f_n(\pi)^2 = f_n(\pi)^2$ 이고 $f_1(\pi) = 1$ 이므로, 모든 자연수 n 에 대하여

$$f_n(\pi) = 1. \tag{3}$$

식 (2) 와 (3) 에 의해 $f_{n+1}'(\pi) = \pi + 2f_n'(\pi)$ 또는

$$f_n'(\pi) = \pi + 2f_{n-1}'(\pi) \tag{4}$$

임을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} f_n'(\pi) + \pi &= 2(f_{n-1}'(\pi) + \pi) \\ &\vdots \\ f_n'(\pi) + \pi &= 2^{n-1}(f_1'(\pi) + \pi) \end{aligned}$$

이고 (1) 식에서 $f_1'(\pi) = -1$ 이므로

$$f_n'(\pi) = 2^{n-1}(\pi - 1) - \pi \tag{5}$$

이다.

[채점기준]

1. 식 (1)을 유도할 경우 2점.
2. 식 (2)와 (3) 이 각 3점.
3. 식 (4)를 유도할 경우 2점.
4. 정답인 식 (5)를 유도할 경우 3점.

[채점소감] 일부 학생들의 경우 $\sin\pi$ 값과 $\cos\pi$ 값을 잘못 계산하여 오답을 유도하였는데, 시험 중의 실수라고 생각된다. 위의 경우를 제외하고는 부분 점수를 받은 학생은 거의 없는 편이었다. 대부분의 학생들이 끝까지 잘 풀거나 처음부터 못 푼 학생의 두 부류로 나누어졌다. 특히 함수를 미분한 후 x에 π를 대입하여야 함에도 불구하고, π를 x에 대입한 다음 이를 미분하는 어처구니 없는 경우도 있었다. 벌써부터 미분 방법을 잊어버린 것은 우려스러운 일이다.