2010학년도 수학성취도 측정시험

(2010학년도 정시모집 합격생 대상)

2010년 2월 17일, 고사시간 90분

- 1번부터 6번까지는 단답형이고, 7번부터 10번까지는 서술형입니다.
- 답안지는 깨끗한 글씨로 바르게 작성하되, 단답형은 답만 쓰고, 서술형은 풀이과정과 답을 명시하시오.
- 총 배점은 80점이고, 각 문항의 배점은 단답형은 5점((1)은 2점, (2)는 3점), 서술형은 10점, 기본점수 10점입니다.

$\boxed{\text{2010년 정시 1번}}$ 다음 부정적분을 구하라.

(1) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+1}dx = \boxed{}$

(2) $\displaystyle\int x^2 \sin x dx = \boxed{}$

[풀이] (1) $t := e^x + 1$로 치환하면 $dt = e^x dx$이므로,

$$\int \frac{e^x}{e^x+1}dx = \int \frac{1}{t}dt = \ln|t| + C = \ln(e^x+1) + C$$

이다. 단, C는 적분상수이다.

(2) $x^2 = u$, $\sin x = v'$이라 놓고 부분적분하면

$$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2\int x \cos x dx$$

이다. 또한,

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x$$

이므로 답은

$$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + C$$

이다. 여기서 C는 적분상수.

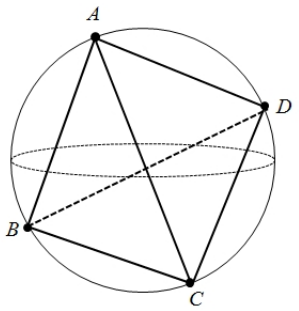
[채점 기준] 적분상수 C를 생략해도 정답처리하였다.

[채점 소감] (1) 대부분의 학생들이 잘 해결하였으나, 답을 $\ln|t|$ 형태로 쓴 답안이 더러 보여 0점 처리하였다. 치환적분 과정을 완벽히 끝내지 않은 답이었기 때문이다. 채점자가 풀이 과정을 볼 수 없는 단답형 문제에서는 올바른 답을 유도해 내어야 한다.

(2) 대부분의 학생이 잘 풀었으나, 계산 실수를 한 학생들이 눈에 띄었다. 부분적분은 기초적인 적분 방법이니만큼 원리를 잊어버린 학생들은 다시 복습을 하기 바란다.

$\boxed{\text{2010년 정시 2번}}$ 구면 위에 네 점이 서로 일정한 거리로 떨어져 있다. 이 점들 중의 두 점을 구의 중심에서 바라보는 각을 θ라 할 때, $\cos\theta = \boxed{}$이다.

[풀이] 구면 위에 서로 일정한 거리로 떨어져 있는 네 점은 정사면체를 이루므로 구에 내접한 정사면체를 생각하자. 구의 반지름을 1이라 해도 무방하다.



구의 중심을 O라 하고, $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}$를 각각 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$라 하면, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = |\vec{d}| = 1$이다. 또한, $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{b} - \vec{c}|$의 양변을 제곱하여 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c}$를 얻는다. 마찬가지 방법으로, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot d = \vec{b} \cdot c = \vec{b} \cdot d = \vec{c} \cdot d$를 얻는다. 그런데 $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$이므로

$$\begin{aligned} 0 &= |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}|^2 \\ &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + |\vec{d}|^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{d} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{d} + \vec{c} \cdot \vec{d}) \\ &= 4 + 12(\vec{a} \cdot \vec{b}) \end{aligned}$$

이므로 $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{1}{3}$이다. 따라서, 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$의 사잇각 θ에 대해

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = -\frac{1}{3}$$

이 성립한다.

[채점 소감] 0이라는 오답이 많이 나왔다. 서로 일정한 거리를 이루는 네 점이 이루는 도형이 무엇인지 모르고 정사각형 형태로 대충 생각하여 90도라는 답이 나온 것이 아닌가 생각한다.

$\boxed{\text{2010년 정시 3번}}$ 세 단위벡터 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$가 서로간에 $\frac{\pi}{3}$ 크기의 각을 이룰 때 벡터 $\mathbf{a} + 2\mathbf{b} + 3\mathbf{c}$의 크기는 $\boxed{}$이다.

[풀이] $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$가 단위벡터이므로, $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = 1$이고, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$이다. 마찬가지로, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \frac{1}{2}$이다. 따라서,

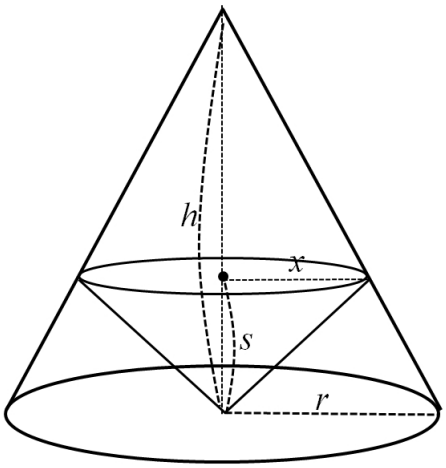
$$\begin{aligned} |\mathbf{a} + 2\mathbf{b} + 3\mathbf{c}|^2 &= |\mathbf{a}|^2 + 4|\mathbf{b}|^2 + 9|\mathbf{c}|^2 + 4(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + 6(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) + 12(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \\ &= 25 \end{aligned}$$

이므로, $|\mathbf{a} + 2\mathbf{b} + 3\mathbf{c}| = 5$이다.

[채점 소감] 많은 학생들이 쉽게 해결하였으나, 간간이 계산 실수를 한 학생들이 보였다. 특히 답을 25라 적은 학생이 많았는데, 이런 실수를 하면 안 되겠다.

2010년 정시 4번 밑면의 반지름의 길이가 r이고 높이가 h인 직원뿔 C가 있다. 거꾸로 선 직원뿔을 C 속에 내접시켜 부피가 최대가 되도록 할 때, 내접시킨 직원뿔의 높이는 $\boxed{}$이다.

[풀이] 그림과 같이 거꾸로 선 직원뿔의 부피를 V라 하자.



거꾸로 선 직원뿔의 높이를 s라 하면, 밑면의 반지름 x는 $x = \frac{r(h-s)}{h}$이므로 부피 V는

$$V = \frac{1}{3}\pi x^2 s = \frac{\pi r^2}{3h^2}(h-s)^2 s$$

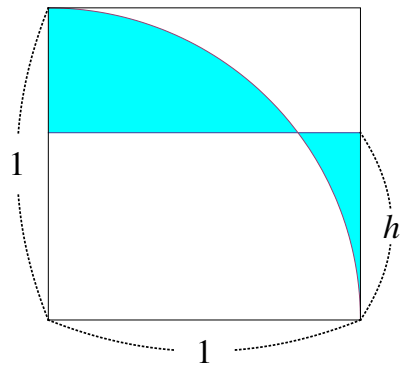
이다. 이를 s로 미분하면,

$$\frac{dV}{ds} = \frac{\pi r^2}{3h^2}(3s-h)(s-h)$$

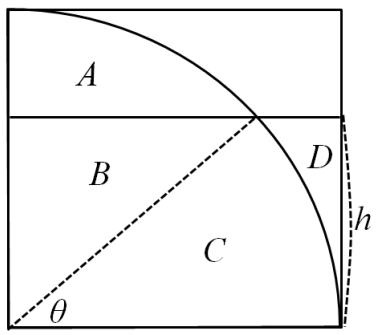
이다. 증감표를 그려보면 $s = \frac{h}{3}$일 때 극댓값을 가짐을 알 수 있다. 즉 높이가 $\frac{h}{3}$일 때, 부피 V는 최댓값을 가진다.

[채점 소감] $\frac{2}{3}h$라는 오답이 많았는데, 비슷한 유형의 문제의 답을 외웠기 때문으로 보인다.

2010년 정시 5번 한 변의 길이가 1인 정사각형의 한 꼭짓점에서 반지름이 1인 사분원을 그린 후, 정사각형의 밑변에 평행선을 그어, 그림과 같이 칠한 영역의 넓이가 최소가 되게 할 때, 높이 h는 $\boxed{}$이다.



[풀이] 정사각형의 밑변에 평행한 변과 원의 교점이 x 축의 양의 방향으로 θ에 위치해 있다고 하자.



그림에 표시된 각각의 넓이를 θ로 표현하면, $A = \frac{\pi}{4} - B - C$, $D = \sin\theta - B - C$이고, $B = \frac{1}{2}\cos\theta\sin\theta$, $C = \frac{1}{2}\theta$이므로, 문제에 제시된 넓이 S는

$$S = A + D = \frac{\pi}{4} - \theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta + \sin\theta$$

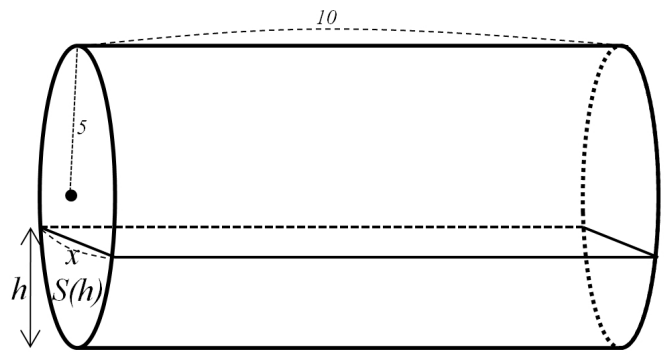
이다. 따라서

$$\frac{dS}{d\theta} = -\cos\theta(2\cos\theta - 1)$$

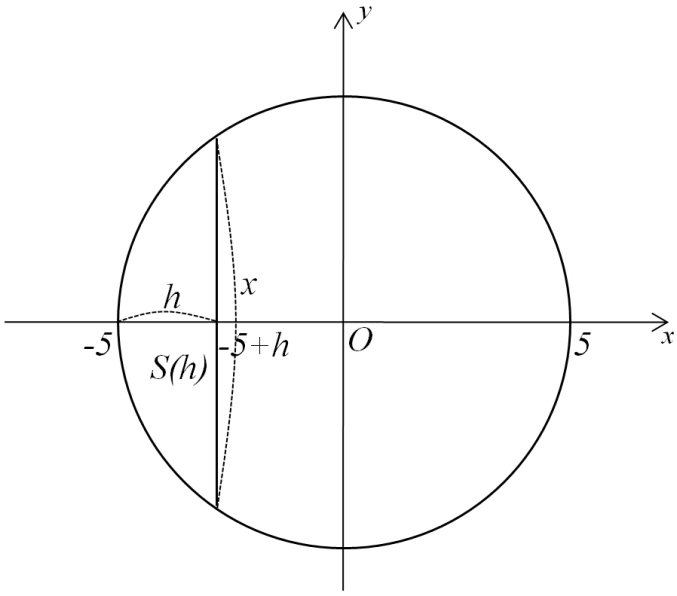
이므로, $\cos\theta = \frac{1}{2}$, 즉, $h = \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$에서 최솟값을 가짐을 알 수 있다.

$\boxed{\text{2010년 정시 6번}}$ 높이가 10m이고 밑면의 반지름의 길이가 5m인 원기둥을 뉘여 놓은 모양의 빈 수조에 분당 5m^3의 속도로 물을 붓는다면, 물의 깊이가 2m일 때, 물의 깊이의 변화율은 (가) = $\boxed{}$분이고 수면의 넓이의 변화율은 (나) = $\boxed{}$ m^2/분이다.

[풀이] (가)



t분 후의 물의 깊이를 h, 물이 이루는 옆면의 넓이를 $S(h)$라 하자. $S(h)$를 구하기 위해 다음과 같은 그림을 생각하자.



이때, $S(h)$는

$$S(h) = 2\int_{-5}^{-5+h} \sqrt{25 - s^2}ds$$

이므로,

$$\frac{dS(h)}{dh} = 2\sqrt{25 - (-5+h)^2} = 2\sqrt{10h - h^2}$$

이다. 또한 물의 부피 $V(t)$는 $V(t) = 10S(h)$이므로,

$$\frac{dV(t)}{dt} = 10\frac{dS(h)}{dt} = 10\frac{dS(h)}{dh}\frac{dh}{dt}$$

이고, 조건에서 $\frac{dV(t)}{dt} = 5$이므로,

$$\frac{dh}{dt}\Big|_{h=2} = \frac{1}{4\sqrt{10h - h^2}}\Big|_{h=2} = \frac{1}{16}$$

이다.

(나) 위 그림에서 $x = 2\sqrt{25 - (-5+h)^2} = 2\sqrt{10h - h^2}$이므로, t분 후의 수면의 넓이 $A(t)$는

$$A(t) = 20\sqrt{10h - h^2}$$

이다. 이때

$$\left.\frac{dA(t)}{dt}\right|_{h=2} = \frac{20(5-h)}{\sqrt{10h-h^2}}\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=2} = 15\cdot\frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

이다.

[채점 소감] 답을 적지 못한 학생도 많았고, 오답도 제각각이었다. 계산이 조금만 복잡하면 계산 실수가 많아지는 것 같다.

$\boxed{\text{2010년 정시 7번}}$ 좌표평면 위의 주어진 점 $P=(a,b)$ (단, $b>a^2$)을 지나고 기울기가 k인 직선이 포물선 $y=x^2$과 만나는 두 점을 Q, R이라 하자. 점 Q와 R에서 각각 포물선에 접하는 두 직선과 포물선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(k)$라 할 때, $S(k)$를 최소로 하는 k의 값을 구하라.

[풀이] 점 $P(a,b)$를 지나고 기울기가 k인 직선 ℓ의 방정식은 $y=k(x-a)+b$이고, 포물선 $y=x^2$과 직선 ℓ의 교점을 $Q(\alpha,\alpha^2)$, $R(\beta,\beta^2)$라고 하면, α,β는 방정식 $x^2-kx+ka-b=0$의 두 근이다. 편의상 $\alpha<\beta$라고 하자. 그런데 점 Q, R에서의 접선의 방정식은 각각 $y=2\alpha x-\alpha^2$, $y=2\beta x-\beta^2$이고, 두 접선의 방정식의 교점은 $T\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\alpha\beta\right)$이다. 따라서 포물선 $y=x^2$과 점 Q, R에서의 접선의 방정식으로 둘러싸인 도형의 넓이 S는 다음과 같다.

$$S=\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(x^2-(2\alpha x-\alpha^2)\right)dx+\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}\left(x^2-(2\beta x-\beta^2)\right)dx=\frac{(\beta-\alpha)^3}{12}$$

한편 이차 방정식의 근과 계수의 관계로부터 $\alpha+\beta=k$, $\alpha\beta=ka-b$이므로,

$$S(k)=\frac{(\beta-\alpha)^3}{12}=\frac{1}{12}(k^2-4ak+4b)^{\frac{3}{2}}$$

이다. 따라서 $S(k)$가 최대, 최소이게 하는 k 값은 $g(k)=k^2-4ak+4b$가 최대, 최소이게 하는 k 값과 같다. $g(k)$는 $k=2a$에서 유일한 최솟값을 가지므로, 구하고자 하는 k의 값은 $2a$이다.

[채점 기준]

- 마지막 식까지 잘 정리하면 5점, k 값까지 정확히 구하면 10점.
- 포물선의 내부 넓이와 외부 넓이의 비가 $2:1$인 사실을 증명 없이 이용한 경우 0점.
- 마지막 식에서 α,β,k를 섞어서 표현하고, k 값을 구하지 못한 경우 0점.

[채점 소감] 그리 어려운 문제는 아니었고, 대부분의 학생이 정확한 계산 과정을 통해서 문제를 잘 풀었다. 그런데 소수의 학생이 정확한 계산보다는 직관과 검증되지 않은 사실에 의존해서 문제를 풀었다. 서술형 수학 문제를 풀 때에는 논리적인 모순이 없도록 이용하는 사실의 근거를 철저히 뒷받침해 주어야 한다. "정확한 계산" 또한 수학의 중요한 한 부분임을 다시 한 번 강조한다.

$\boxed{\text{2010년 정시 8번}}$ 좌표평면의 곡선

$$X(t)=2^{-t}(\cos t,\sin t)\quad(t\geqq 0)$$

의 길이를 구하라.

[풀이] L을 주어진 곡선 $X(t)$의 길이라 하면 $L = \lim_{b\to\infty}\int_0^b |X'(t)|dt$이다.

$$X'(t) = (-2^{-t}\ln 2\cos t - 2^{-t}\sin t, -2^{-t}\ln 2\sin t + 2^{-t}\cos t)$$

이므로,

$$\begin{aligned}|X'(t)|^2 &= 2^{-2t}(\ln 2)^2\cos^2 t + 2^{-2t}\sin^2 t + 2^{-2t}(\ln 2)^2\sin^2 t + 2^{-2t}\cos^2 t \\ &= 2^{-2t}(\ln 2)^2 + 2^{-2t} = 2^{-2t}(1+(\ln 2)^2)\end{aligned}$$

이다. 따라서 $|X'(t)| = 2^{-t}\sqrt{1+(\ln 2)^2}$이고,

$$\begin{aligned}L &= \lim_{b\to\infty}\int_0^b 2^{-t}\sqrt{1+(\ln 2)^2}dt = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{2^{-t}}{\ln 2}\sqrt{1+(\ln 2)^2}\right]_0^b \\ &= \frac{\sqrt{1+(\ln 2)^2}}{\ln 2}.\end{aligned}$$

[채점 기준]

- $X'(t)$의 정확한 계산 5점, 그 이후의 계산에서 답이 맞으면 5점.
- $X'(t)$의 계산이 틀렸더라도, 이후의 적분 계산은 틀리지 않았으면 5점.

[채점 소감] $f(x) = a^x$ (단, $a > 0$)의 미분과 적분의 계산을 제대로 하지 못하는 학생이 많았다. $f'(x) = a^x\ln a$가 아니라 $f'(x) = a^x$로 계산하는 오답이 가장 많았다. 또한 일부 학생의 경우 곱의 미분을 잘못하여 $h(x) = f(x)g(x)$로부터 $h'(x) = f'(x)g'(x)$로 계산하는 실수를 범하기도 했으며, 곡선의 길이를 구하는 공식을 알지 못하는 학생도 많았다.

$\boxed{\text{2010년 정시 9번}}$ 함수 $f(x)$가 모든 실수 x, y에 대하여

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + xy$$

를 만족하며 $f'(0) = 1$일 때, $f(x)$를 구하라.

[풀이] $x = 0$, $y = 0$을 대입하면 $f(0) = 2f(0) + 0$이다. 따라서, $f(0) = 0$이다. $y \neq 0$일 때, $f(x+y) - f(x) = f(y) + xy$를 y로 나누면

$$\frac{f(x+y)-f(x)}{y} = \frac{f(y)-0}{y} + x$$

를 얻는다.

오른쪽 변에 $\lim_{y\to 0}$을 취하면 모든 x에서 미분가능함을 알고 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$f'(x) = f'(0) + x = 1 + x$$

양변을 적분하고, 위에서 얻은 $f(0) = 0$을 이용하면

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x$$

이다.

[채점 기준] $f'(x) = f'(0) + x$까지 맞으면 5점.

[채점 소감] 미분 가능성을 따지지 않고 편미분을 이용한 학생은 0점 처리하였다.

$\boxed{\text{2010년 정시 10번}}$ $x = 1$에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 $x = 1$에서 극솟값을 가지면 $f'(1) = 0$임을 밝히라.

[풀이] $f(x)$가 $x = 1$에서 극솟값을 가지므로 충분히 작은 모든 양수 h에 대해 다음 두 식이 성립한다.

$$f(1+h) - f(1) \geq 0, \quad f(1-h) - f(1) \geq 0.$$

h와 $-h$로 각각 양변을 나누면

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} \geq 0, \quad \frac{f(1-h) - f(1)}{-h} \leq 0$$

을 얻는다. 각각을 $h \to 0^+$로 보내 극한을 취하면

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \geq 0, \quad \lim_{h \to 0^+} \frac{f(1-h) - f(1)}{-h} \leq 0$$

을 얻는다. 한편 $f(x)$가 $x = 1$에서 미분가능하므로, $f'(1) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ 및 $f'(1) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(1-h) - f(1)}{-h}$이 성립한다. 따라서, $f'(1) \geq 0$ 및 $f'(1) \leq 0$임을 알 수 있고, 결과적으로 $f'(1) = 0$이다.

[채점 기준]

- $f(x)$가 $x = 1$이 아닌 점에서 미분가능이라고 가정한 경우는 0점.
- 극솟값의 정의를 도함수의 연속의 경우로 이해하고 서술한 경우도 0점.

[채점 소감] 전반적으로 서술을 잘 하였으나, 극소의 정의를 도함수가 연속인 경우를 정의로 생각하여 문제의 본질을 놓친 응시자가 많았다. 언급해야 할 부분인데도 불구하고 사소한 부분이라고 판단하여, 설명없이 이용하는 경우가 있어 감점을 받는 경우가 있었다. 또한 주어진 조건 외의 가정을 하여 논의를 서술한 경우가 종종 있었는데, 명제의 증명에서 가장 주의해야 할 요소라 하겠다.