2010학년도 수학성취도 측정시험

(2010학년도 수시모집 합격생 대상)

2009년 12월 18일, 고사시간 90분

- 1번부터 6번까지는 단답형이고, 7번부터 10번까지는 서술형입니다.
- 답안지는 깨끗한 글씨로 바르게 작성하되, 단답형은 답만 쓰고, 서술형은 풀이과정과 답을 명시하시오.
- 총 배점은 80점이고, 각 문항의 배점은 단답형은 5점, 서술형은 10점, 기본점수 10점입니다.

$\boxed{\text{2010년 수시 1번}}$ 함수 $f(x) = \sum_{n=1}^{10} \sin \frac{x}{n}$의 주기는 $\boxed{}$이다.

[풀이] $\sin \frac{x}{n}$의 주기는 $2n\pi$이다. 한편, $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$의 최소공배수는 $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7 = 2520$이므로, $\{2n\pi | n = 1, \ldots, 10\}$의 최소공배수는 $2\pi \times 2520 = 5040\pi$이다. 따라서 모든 x 에 대하여 $f(x+5040\pi) = f(x)$ 이다. 한편, 어떤 $p > 0$ 가 모든 모든 x 에 대하여 $f(x+p) = f(x)$ 를 만족한다면,

$$\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n} = f'(0) = f'(p) = \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n} \cos \frac{p}{n}$$

이어야 하므로, p 는 5040π 의 자연수배이다. 따라서 $f(x)$ 의 주기는 5040π 이다.

$\boxed{\text{2010년 수시 2번}}$ 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$에서 정의된 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$을 자신과 합성한 것을 f^2로 쓰고, 일반적으로

$$f^{n+1} = f \circ f^n \quad (n = 2, 3, \ldots)$$

으로 정의한다. 만약

$$f(x) = \begin{cases} 2x & (x < \frac{1}{2}) \\ 2 - 2x & (x \geq \frac{1}{2}) \end{cases}$$

이면, 정적분 $\int_0^1 f^{2010}(x)dx$의 값은 $\boxed{}$이다.

[풀이] 합성함수의 그래프를 유추해보면 밑변의 길이가 2^{-2009}이고 높이가 1인 이등변삼각형이 2^{2009} 개 있음을 알 수 있다. 따라서 적분값은 이들 삼각형의 넓이 즉,

$$2^{-2009} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2^{2009} = \frac{1}{2}$$

이다.

$\boxed{\text{2010년 수시 3번}}$ 좌표평면에서 중심이 $(3\sqrt{2}, 0)$이고 반지름의 길이가 1인 원의 내부를 직선 $y = x$를 축으로 하여 회전시킬 때 생기는 입체의 부피는 $\boxed{}$이다.

[풀이] $y = x$를 x 축으로 이동하여 생각하면, $x^2 + (y-3)^2 = 1$을 x 축을 기준으로 회전한 입체의 부피를 구하라는 문제가 된다. (이때 3은 원의 중심으로부터 $y = x$까지의 거리) 따라서 부피는

$$\pi \int_{-1}^{1} (3 + \sqrt{1-x^2})^2 - (3 - \sqrt{1-x^2})^2 dx = 12\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} dx = 12\pi \cdot \frac{\pi}{2} = 6\pi^2$$

이다.

$\boxed{\text{2010년 수시 4번}}$ 모든 실수 x에 대해서 $\displaystyle\int_x^{x+1} f(t)dt = x^2$을 만족시키는 다항식 $f(x)$는 $\boxed{}$이다.

[풀이] 양변을 x로 미분하면 $f(x+1) - f(x) = 2x$이 성립한다. $f(x)$가 n차 다항식 $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ (단, $a_n \neq 0$)이라면, $f(x+1) - f(x) = a_n(nx^{n-1} + \cdots) + \cdots + a_1$은 $n-1$차식이다. 따라서, $n = 2$여야 한다. $f(x) = ax^2 + bx + c$으로 놓고 대입하면, $(a \neq 0)$

$$\int_x^{x+1} f(t)dt = \frac{a}{3}(3x^2 + 3x + 1) + \frac{b}{2}(2x+1) + c$$

이므로, 계수를 비교하여 $a = 1$, $b = -1$, $c = \frac{1}{6}$을 얻는다. 그러므로, $f(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$이다.

[채점 소감] 적분상수 계산을 못하여 $f(x) = x^2 - x + c$로 쓴 학생이 여러 명 있었으며 $f(x) = x^2 + x + \frac{1}{6}$으로 적은 학생도 있었다. 처음 식을 미분하면 상수에 대한 정보가 사라지므로, 원래 식으로부터 상수를 구해야 한다는 것을 몰랐던 것으로 보인다. $f(x)$를 1차 함수 또는 3차 함수로 답한 경우도 종종 있었다.

$\boxed{\text{2010년 수시 5번}}$ 좌표공간에서 두 점 $A = (1,2,3)$, $B = (4,5,6)$에 대해 곡선

$$X(t) = (\sin^2 t)A + (\cos^2 t)B \quad \left(0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

의 길이는 $\boxed{}$이다.

[풀이] $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ 및 $0 \leq \sin^2 t \leq 1$, $0 \leq \cos^2 t \leq 1$로부터 X는 A와 B를 잇는 선분임을 알 수 있다. 따라서, $|A - B| = \sqrt{3^2 + 3^3 + 3^2} = 3\sqrt{3}$이다.

[다른 풀이] $X'(t) = (A - B)\sin 2t$ $(0 < t < \pi/2)$이므로, 곡선 $X(t)$의 길이 L은

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\pi/2} |X'(t)| dt = \int_0^{\pi/2} |A - B||\sin 2t| dt \\ &= |A - B| \int_0^{\pi/2} \sin 2t dt \quad (0 \leq t \leq \pi/2\text{에서 } \sin 2t \geq 0 \text{ 이므로}) \\ &= |(1,2,3) - (4,5,6)| \left[-\frac{\cos 2t}{2} \right]_0^{\pi/2} \\ &= |(-3,-3,-3)| \cdot 1 = 3\sqrt{3}. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{2010년 수시 6번}}$ 좌표공간에서 원점을 O, x 축 위의 한 점을 X, y 축 위의 한 점을 Y, z 축 위의 한 점을 Z라고 하자. $\triangle OYZ$, $\triangle OZX$, $\triangle OXY$의 넓이가 각각 a, b, c일 때, $\triangle XYZ$의 넓이는 $\boxed{}$이다.

[풀이] $X = (p,0,0), Y = (0,q,0), Z = (0,0,r)$이라고 놓자. $\overrightarrow{XY} = (-p,q,0)$, $\overrightarrow{XZ} = (-p,0,r)$이다. 이때 삼각형 XYZ의 넓이는 $\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{XY}|^2|\overrightarrow{XZ}|^2 - (\overrightarrow{XY}\cdot\overrightarrow{XZ})^2}$이므로 대입하면

$$\frac{1}{2}\sqrt{(p^2+q^2)(p^2+r^2)-p^4} = \frac{1}{2}\sqrt{p^2q^2+p^2r^2+q^2r^2}$$

이다. 준 조건으로부터 $a = |qr/2|$, $b = |rp/2|$, $c = |pq/2|$이므로, $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$가 구하는 답이다.

[다른 풀이] $X = (p,0,0), Y = (0,q,0), Z = (0,0,r)$이라 놓고, $\triangle XYZ$의 밑변을 $\overline{XY}$라 하자. 이때 밑변의 길이 l은 $l = |\overline{XY}| = \sqrt{p^2+q^2}$이다. 점 Z에서 선분 $\overline{XY}$ 혹은 그 연장선으로 내린 수선의 발을 M이라 할 때, $M = ((1-s)p, sq, 0)$의 형태로 쓸 수 있다. $\overline{ZM}$과 $\overline{XY}$가 수직이어야 하므로,

$$((1-s)p, sq, -r)\cdot(-p,q,0) = (s-1)p^2 + sq^2 = 0$$

이 성립해야 하고, 이로부터 $s = \frac{p^2}{p^2+q^2}$를 얻는다. 따라서 $\triangle XYZ$의 높이 h는

$$h = |\overline{ZM}| = |((1-s)p, sq, -r)| = \sqrt{(1-s)^2p^2 + s^2q^2 + r^2}$$

이다. 정리하면

$$\sqrt{\frac{p^2q^4}{(p^2+q^2)^2} + \frac{p^4q^2}{(p^2+q^2)^2} + r^2} = \sqrt{\frac{p^2q^2}{p^2+q^2} + r^2}$$

이므로, 삼각형 $\triangle XYZ$의 넓이는 $\frac{1}{2}hl = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p^2q^2}{p^2+q^2}+r^2}\sqrt{p^2+q^2}$이고, 이를 정리하면

$$\frac{1}{2}\sqrt{p^2q^2+(p^2+q^2)r^2} = \frac{1}{2}\sqrt{p^2q^2+q^2r^2+r^2p^2} = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

이다.

[채점 소감] $a = |qr/2|$, $b = |rp/2|$, $c = |pq/2|$의 관계식을 잘못 적용하여 오답을 적은 학생이 많았다.

$\boxed{\text{2010년 수시 7번}}$ 반지름의 길이가 r인 원의 내부에 점 P가 있다. P를 지나고 서로 수직인 두 직선을 그어 원과 만나는 점을 각각 A, B, C, D라 할 때, $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 + \overline{PD}^2$을 구하라.

[풀이] 점 P가 1사분면에 위치하고, $\overline{AC}$와 $\overline{BD}$가 각각 x 축, y 축에 평행하도록 좌표축을 잡는다. 이때, P의 좌표를 (a,b)라 하면, $\overline{PA} = \sqrt{r^2-b^2}+a$, $\overline{PB} = \sqrt{r^2-a^2}+b$, $\overline{PC} = \sqrt{r^2-b^2}-a$, $\overline{PD} = \sqrt{r^2-a^2}-b$이고,

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 + \overline{PD}^2 = 2(r^2-b^2+a^2) + 2(r^2-a^2+b^2)$$

이므로, $4r^2$이 원하는 답이다.

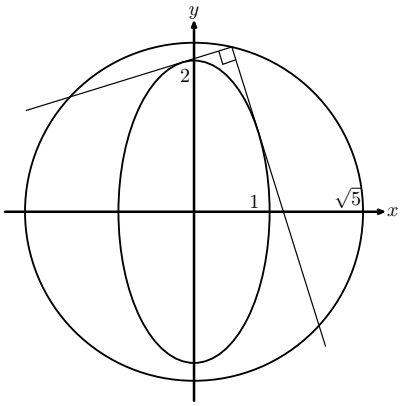
[채점 기준]

- 모범답안 이외에 사인 법칙이나 코사인 법칙 등을 사용하여 올바르게 증명한 경우 20점.
- 점 P가 특정한 점(예: 원점)인 경우에 대해서만 증명한 경우 0점.
- 답은 맞으나 논리에 어긋나는 증명 0점.
- 약간의 논리적인 비약이 있는 경우 5점 감점.

[채점 소감] 많은 학생들이 도전은 하였으나, 만점을 받은 학생은 많지 않았다. 답은 알고 있으나 자신의 생각을 논리에 맞게 수학적으로 기술하는 방법을 모르는 학생들이 많았다. 문제를 어렵게만 접근하지 말고, 학교 교육에서 습득한 수학적 지식과 언어를 이용하여 문제를 해결하려는 연습이 필요하다 하겠다.

$\boxed{\text{2010년 수시 8번}}$ 좌표평면에서 타원 $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$ 밖의 점 P에서 타원을 향해 그은 두 접선의 사잇각이 둔각이라고 한다. 이러한 점 P들로 이루어진 영역의 넓이는 얼마인가?

[풀이]



먼저 $P(a, b)$에서 그은 두 접선의 사잇각이 직각인 경우를 구하자. 타원에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식은

$$y = mx \pm \sqrt{m^2 + 4}$$

이므로, 타원 밖의 점 $P(a, b)$에서 타원을 향해 그은 두 접선은 다음을 만족한다.

$$b = ma \pm \sqrt{m^2 + 4}$$

$(b - ma)^2 = m^2 + 4$를 정리하면, 이차 방정식

$$(a^2 - 1)m^2 - 2abm + (b^2 - 4) = 0$$

을 얻는다. 근과 계수의 관계에 의해 두 기울기 m_1, m_2의 곱은 $m_1 m_2 = \frac{b^2-4}{a^2-1}$이다. 서로 수직인 직선의 기울기를 곱하면 -1이므로 $a^2 + b^2 = 5$이다.

원하는 경우인 둔각을 이루려면 이 원의 내부여야 하는데, $P(a,b)$가 타원의 외부에 있는 점이어야 하므로 원하는 넓이는

$$\text{반지름이 } \sqrt{5}\text{인 원의 넓이} - \text{타원의 넓이} = 5\pi - 2\pi = 3\pi$$

를 얻는다.

[채점 기준] 명확한 논리와 계산 과정을 통하여 답안을 작성하여야 한다. 추정이나, 핵심적인 계산 과정을 생략한 경우는 감점하였다.

[채점 소감] 많은 학생들이 추정을 통해 원의 방정식을 얻었는데, 이는 수학 공부를 결과 위주로 하는 경향 때문으로 보인다. 근본적인 원리와 이론을 통하여 결과를 유도하는 훈련 과정이 필요하다고 생각한다.

$\boxed{\text{2010년 수시 9번}}$ 반지름의 길이가 r인 구의 내부에, 밑면이 정n각형인 각뿔을 부피가 최대가 되도록 넣을 때, 이 최대 부피 V_n과 $\lim_{n\to\infty} V_n$을 구하라.

[풀이] 각뿔의 밑면의 넓이를 $S(R)$이라 하면 부피는 $\frac{1}{3}\cdot S(R)\cdot(r+x)$이다. 먼저 밑면의 넓이 $S(R)$을 구하자. 꼭지각이 $\frac{2\pi}{n}$이고 등변의 길이가 R인 이등변삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2}\left(2R\sin\frac{\pi}{n}\right)\left(R\cos\frac{\pi}{n}\right) = \frac{R^2}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$$

이므로

$$S(R) = \frac{nR^2}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$$

이다. 한편, $R^2 = r^2 - x^2$이므로 각뿔의 부피 $\tilde{V}_n(x)$을 구하면

$$\begin{aligned}\tilde{V}_n(x) &= \frac{1}{3}\cdot\frac{n(r^2-x^2)}{2}\cdot\sin\frac{2\pi}{n}\cdot(r+x)\\ &= \frac{n}{6}\sin\frac{2\pi}{n}(r^2-x^2)(r+x)\end{aligned}$$

이다. 이제 $h(x) = (r^2-x^2)(r+x)$의 미분계수가 0인 점을 찾으면, $x = \frac{r}{3}$에서 $\tilde{V}_n(x)$가 최댓값을 가짐을 알 수 있다. 따라서

$$V_n = \tilde{V}_n\left(\frac{r}{3}\right) = \frac{16n}{81}r^3\sin\frac{2\pi}{n}$$

이다. 또한 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{n} = 1$로부터 $\lim_{n\to\infty} V_n = \frac{32}{81}\pi r^3$을 얻는다.

[채점 기준]

- $\tilde{V}_n(x)$의 식을 세우는 부분 4점.
- 미분을 이용하여 부피의 최댓값 V_n을 구하는 부분 3점.
- V_n의 극한을 구하는 부분 3점.
- V_n의 극한을 구할 때 계산 실수를 한 경우, $\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x} = 1$의 내용이 명시되어 있으면 3점, 그렇지 않으면 0점.

- 'V_n의 극한은 원뿔의 부피'라고 가정하여 $\lim_{n\to\infty} V_n$을 구한 경우 맞으면 3점.

[채점 소감] 각뿔의 밑면인 정n각형의 넓이를 구해야 하는 한편, 각뿔이 구에 내접할 경우를 가정하고 각뿔의 부피와 구의 반지름과의 관계까지 고려해야 하므로, 수험자들에게 까다로운 문제였던 것으로 보인다. 답안을 작성할 때 단순히 정확한 식만을 나열하는 것이 아니라, 그 식이 나오기까지의 과정을 논리적으로 표현할 수 있어야 한다. V_n의 극한을 구할 때, 'n이 무한히 커지면 정n각형이 원으로 수렴하므로 V_n의 극한도 원뿔의 부피로 수렴한다'는 식으로 논리를 전개한 경우가 많았다. 옳은 예상이긴 하지만 엄밀한 증명이 필요한 것이므로 주의를 요하는 부분이며, 바른 풀이라 볼 수 없다. 실제로 이 문제의 의도는 이 예상이 맞는지를 정확한 계산을 통해 확인해 보는 것이라 할 수 있다. '밑넓이를 높이에 관해 나타내고 미분을 이용하여 부피의 최댓값을 구하고 극한을 취하면 된다'는 식으로 풀이의 아이디어만 적어놓은 경우도 있었다. 답안에 정확한 식 또는 계산 과정이 없이 아이디어만 모호하고 장황하게 쓰는 경우 점수를 얻을 수 없다. 계산을 틀리거나 대입할 때 문자를 빠뜨리는 등의 실수도 많이 있었다. 사소한 실수라 할 수 있지만 답에는 큰 영향을 끼치므로 주의를 요한다.

$\boxed{\text{2010년 수시 10번}}$ 자연수 n과 $r = 0, 1, \ldots, n$에 대해 다음 등식을 증명하라.

$$\int_0^1 x^r(1-x)^{n-r}dx = \frac{1}{(n+1)_nC_r}.$$

[풀이] $y > 1$에 대하여 다음 항등식에서 y^r의 계수를 비교하면 증명이 끝난다.

$$\begin{aligned}\sum_{r=0}^{n} {}_nC_r y^r \int_0^1 x^r(1-x)^{n-r}dx &= \int_0^1 \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r (xy)^r(1-x)^{n-r}dx \\ &= \int_0^1 (xy + (1-x))^n\, dx \\ &= \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{y-1}\left(y^{n+1}-1\right) \\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{r=0}^{n} y^r\end{aligned}$$

[다른 풀이] 수학적 귀납법을 이용한 방법이 있다. $r = 0$일 때는 $\int_0^1 (1-x)^n dx = \frac{1}{n+1}$이므로 성립한다. 임의의 $r(< n)$에 대하여,

$$\int_0^1 x^r(1-x)^{n-r}dx = \frac{1}{(n+1)_nC_r}$$

이 성립한다고 가정하자. 그러면 부분적분법에 의해서 다음이 성립함을 확인할 수 있다.

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^{r+1}(1-x)^{n-(r+1)}dx &= \frac{-1}{n-r}x^{r+1}(1-x)^{n-r}\Big|_0^1 + \frac{r+1}{n-r}\int_0^1 x^r(1-x)^{n-r}dx \\ &= \frac{r+1}{n-r}\cdot\frac{1}{(n+1)_nC_r} = \frac{1}{(n+1)_nC_{r+1}}\end{aligned}$$

따라서 수학적 귀납법에 의해 증명이 끝난다.

[**다른 풀이**] 귀납적으로 계속 부분 적분을 해 나가는 방법도 있다. 위의 다른 풀이와 비슷하게 2가지 방법으로 증명할 수 있다.

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^r(1-x)^{n-r}dx &= \frac{n-r}{r+1}\int_0^1 x^{r+1}(1-x)^{n-r-1}dx \\ &= \frac{n-r}{r+1}\cdot\frac{n-r-1}{r+2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{n}\int_0^1 x^n dx \\ &= \frac{1}{(n+1)_nC_{r+1}}\end{aligned}$$

혹은

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^r(1-x)^{n-r}dx &= \frac{r}{n-r+1}\int_0^1 x^{r-1}(1-x)^{n-r+1}dx \\ &= \frac{r}{n-r+1}\cdot\frac{r-1}{n-r+2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{n}\int_0^1 (1-x)^n dx \\ &= \frac{1}{(n+1)_nC_{r+1}}\end{aligned}$$

으로 증명할 수 있다.

[**채점 기준**] 어떤 방법을 이용하든 논리적인 비약이 없이 정확한 계산 과정을 거쳐 증명을 하면 10점. 수학적 귀납법을 이용하는 경우 $r=0$일 때를 보이지 않으면 5점 감점.

[**채점 소감**] 제시한 첫 번째 모범답안으로 증명한 학생은 극소수이며, 대부분 부분적분법을 이용하여 각자의 논리를 전개해 나갔다. 증명하는 문제다보니 대부분의 학생이 어떻게 해서든지 증명을 마무리하기 위해 정확한 계산 과정 없이 결론을 이끌어냈고, 이 경우 모두 0점 처리하였다.