2011학년도 수학성취도 측정시험

(2011학년도 정시모집 합격생 대상)

2011년 2월 15일, 고사시간 90분

- 1번부터 11번까지는 단답형이고, 12번부터 16번까지는 서술형입니다.
- 답안지는 깨끗한 글씨로 바르게 작성하되, 단답형은 답만 쓰고, 서술형은 풀이과정과 답을 명시하시오.
- 총 배점은 100점이고, 각 문항의 배점은, 기본문제(1-6번) 각 3점, 발전문제(7-13번) 각 7점, 심화문제(14번-16번) 각 11점입니다.

2011년 정시 1번 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^3-1}{(n-1)(2n+1)^2} = \boxed{}$.

[풀이] $\frac{n^3-1}{(n-1)(2n+1)^2} \sim \frac{n^3}{4n^3}$ 이므로 극한값은 $\frac{1}{4}$ 이다.

2011년 정시 2번 함수 $f(x) = x^3 + \dfrac{1}{x^2} + \ln x$ 의 도함수 $f'(x) = \boxed{}$ 이다.

[풀이] $f'(x) = 3x^2 - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x}$.

2011년 정시 3번 $\int_1^e x \ln x \, dx = \boxed{}$.

[풀이] 부분적분법을 사용하면 $\left[\frac{1}{2}x^2 lnx - \frac{1}{4}x^2\right]_1^e = \frac{1}{4}(e^2+1)$.

2011년 정시 4번 행렬 $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ 의 역행렬은 $\boxed{}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ 이다.

[풀이] 역행렬공식을 이용하면 $a_{11} = -1, a_{12} = 2, a_{21} = -3, a_{22} = 5$임을 알 수 있다.

2011년 정시 5번 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 의 크기가 각각 $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$ 이고, $|\vec{a}+\vec{b}| = 6$ 이면 $\vec{a}\cdot\vec{b} = \boxed{}$ 이다.

[풀이] $|a+b|^2 = |a|^2 + |b|^2 + 2(a\cdot b)$ 를 이용하면 $\vec{a}\cdot\vec{b} = 5.5$.

2011년 정시 6번 좌표공간에서 두 점 $(2,1,4)$ 와 $(1,2,1)$ 을 지나는 직선이 xy 평면과 만나는 점의 좌표는 $\boxed{}$ 이다.

[풀이] 두점 $(2,1,4),(1,2,1)$ 을 지나는 직선의 방정식은 $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-4}{3}$ 이고, xy 평면과 만날때의 z값은 0이므로 식을 풀면 $x = 2/3, y = 7/3$을 얻는다. 따라서 xy 평면과의 교점은 $(2/3, 7/3, 0)$ 이다.

$\boxed{\text{2011년 정시 7번}}$ $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}\,dx = \boxed{}$.

[풀이] $\sqrt{x}=t$라 치환하여 부분적분을 이용하면 원식$=2\int te^t dt = 2e^t(t-1)+C$.
따라서 $\int e^{\sqrt{x}}dx = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+C$를 얻을 수 있다.

$\boxed{\text{2011년 정시 8번}}$ 공간에서 세 점 A, B, C 가 $|\overrightarrow{AB}|=2$, $|\overrightarrow{AC}|=3$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-1$ 을 만족시킬 때, 점 A 에서 선분 BC 에 내린 수선의 발을 H 라 하자. 두 실수 s, t 가

$$\overrightarrow{AH}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$$

를 만족시키면 $s=\boxed{}$, $t=\boxed{}$ 이다.

[풀이] $0=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AH}$ 이므로 식을 풀면 $s=2t$ 라는 관계식을 얻는다. 그리고 $\overrightarrow{AH}$ 는 수선의 발이므로 $s+t=1$ 을 만족한다. 따라서 $s=\dfrac{2}{3}, t=\dfrac{1}{3}$ 이다.

$\boxed{\text{2011년 정시 9번}}$ 구간 $(0,\infty)$ 에서 정의된 함수 $f(x)=2\ln x+\dfrac{a}{x}-x$ 가 극댓값과 극솟값을 모두 가지도록 하는 실수 a 의 범위는 $\boxed{}$ 이다.

[풀이] 극댓값과 극솟값을 모두 갖기 위해서는 $f'(x)=0$ 이 양의 서로다른 두 실근을 가져야 한다. $f'(x)=-\frac{1}{x^2}(x^2-2x+a)$ 이고 이 식의 근은 $x^2-2x+a=0$의 근이다. 이것이 양의 서로다른 두실근을 갖기 위해서는 판별식인$1-a$가 0보다 커야 하고 두근의 곱인 a도 0보다 커야 한다. 따라서 조건을 만족하는 a의 범위는 $0<a<1$이다.

$\boxed{\text{2011년 정시 10번}}$ 타원 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 과 직선 $x=1$ 로 둘러싸인 부분 중 그 크기가 작은 영역의 넓이는 $\boxed{}$ 이다.

[풀이] 영역의 넓이는$2\int_1^2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}dx$ 이다. $x=2\sin\theta$로 치환하여 적분하면 $2\int_1^2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}dx = 4\int_{\pi/2}^{\pi/6}\cos^2\theta d\theta = 2\int_{\pi/2}^{\pi/6}\cos 2\theta+1 d\theta = \frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$이다.

$\boxed{\text{2011년 정시 11번}}$ 단위원 내부 $x^2+y^2<1$ 에 있는 점들 중에서, 준선이 단위원 $x^2+y^2=1$ 에 접하고 초점이 원점인 어떤 포물선에도 놓여 있지 않은 점들로 이루어진 영역의 넓이는 $\boxed{}$ 이다.

[풀이] 영역은 중심이 원점이고, 반지름이 -포물선에서 원점 사이의 (최소)거리- 인 원의 내부이다. 따라서 반지름은 포물선의 정의에 의해 $\dfrac{1}{2}$ 이 되고, 넓이는 $\dfrac{\pi}{4}$ 가 된다.

$\boxed{\text{2011년 정시 12번}}$ 좌표공간에서 원점 O 와, 원 $x^2+y^2=9$, $z=0$ 위를 움직이는 점 P 에 대하여,

$$\overline{OQ}:\overline{QP}=2:1$$

을 만족시키는 점 Q 의 자취의 부피를 구하시오.

[풀이] B-12번
점 $P=(x_0,y_0,z_0)$가 ${x_0}^2+{y_0}^2=9$, $z=0$를 만족한다고 하고, 점 $Q=(x,y,z)$가 주어진 조건을 만족한다고 하자. 그러면,

$$\begin{aligned}\overline{OQ}:\overline{OP}=2:1 \quad &\Longleftrightarrow \quad 2\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\\ &\Longrightarrow \quad 4((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z^2)=x^2+y^2+z^2\\ &\Longleftrightarrow \quad (x-\frac{4}{3}x_0)^2+(y-\frac{4}{3}y_0)^2+z^2=2^2\end{aligned}$$

를 얻는다. 그래서, Q의 자취는 중심이 $(\frac{4}{3}x_0,\frac{4}{3}y_0,0)$이고, 반지름이 2인 구면임을 알 수가 있다. 이때, 이 구면의 중심과 원점간의 거리를 구해보면 $(\frac{4}{3}x_0)^2+(\frac{4}{3}y_0)^2=\frac{16}{9}({x_0}^2+{y_0}^2)=4^2$이므로, 4이다.

한편, 점 P가 곡선 $x^2+y^2=9$, $z=0$를 따라 연속적으로 이동함에 따라 생성되는 Q의 자취들을 모두 모으면 속이 꽉찬 도너츠 모양임을 알 수있다. 이 도너츠 구멍의 중심은 원점이고, 반지름이 2인 원판을 움직일 때, 원판의 중심과 원점과의 거리는 4이므로, 이 도너츠의 부피는 [원판의 넓이×원판의 중심이 그리는 원의 길이]이므로, $4\pi\times(2\times4\pi)=32\pi^2$를 얻는다.

[채점 기준] 1. 바른 논리적 전개를 통해 답을 얻은 경우는 7점.
2. 답은 얻었으나 풀이과정이 부실한 경우는 5점.
3. 자취가 도너츠 형태임을 알고, 원판의 반지름과 회전시킬때의 반지름을 맞았으나 부피 계산이 틀린 경우는 4점.
4. 자취가 도너츠 형태임을 알지만 원판의 반지름이나 회전시킬 때의 반지름이 틀린 경우는 2점.
5. 자취가 도너츠 형태임을 알지 못한 경우는 0점. 6. 자취를 추론할 때, 구면을 회전시키지 않고 원을 회전시켜 도너츠 형태임을 알게된 경우는 총점에서 1점 감점.

[채점 소감] 문제에서 요구하는 답을 구하기 위해 꼭 필요한 요소들을 명확히 적어두지 않은 풀이들은 자신이 실제로 알고 있더라도 좋은 점수를 받기 힘들다는 것을 알아야 합니다. 또한, 단순한 그림으로만 모든 것을 설명하려는 풀이들이 많이 있었는데, 어떻게 그 그림을 얻었는지와 그것이 의미하는 바를 정확히 서술하지 않으면 감점요인이 된다는 것을 알아야 합니다. 마지막으로, 문제를 단순한 식을 세워푸는 것을 떠나서, 이 문제가 의미하는 바와 기하학적으로 어떤 의미를 가지는지를 한번 더 생각해보면, 좋은 답을 얻는데 도움이 될 것이라고 생각합니다.

$\boxed{\text{2011년 정시 13번}}$ 양수 x 에 대하여 적분 $\int_0^x t\sin t\,dt$ 의 값을 $f(x)$ 로 두면, 모든 자연수 k 에 대하여 방정식 $f(x)=0$ 이 구간 $(k\pi,(k+1)\pi)$ 에서 적어도 하나의 실근을 가짐을 보이시오.

[풀이] $f(x) = \int_0^x tsintdt = -xcosx + sinx$. (부분적분 적용)
$f(k\pi) = -k\pi cos(k\pi)$, $f((k+1)\pi) = -(k+1)\pi cos((k+1)\pi)$이므로
$f(k\pi)f((k+1)\pi) = k(k+1)\pi^2 cos(k\pi)cos((k+1)\pi)$.
k는 자연수이고, 모든 k에 대해 $cos(k\pi)cos((k+1)\pi) = -1$이므로,

$$f(k\pi)f((k+1)\pi) < 0 \quad \cdots\cdots \quad (1)$$

이 성립한다.
f가 $[k\pi, (k+1)\pi](k:$ 자연수)에서 연속이고, (1)이 성립하므로 중간값 정리에 의해 f의 실근이 $(k\pi, (k+1)\pi)$상에 적어도 하나 존재한다.

[채점 기준] 감점된 경우
- k 에 대해 귀납법 사용할 때 틀린 경우.
- 중간값 정리에 대한 조건 안쓴 경우.
- (1)에 대한 수학적 근거가 명확하지 않은 경우.
- 계산 실수

[채점 소감] 정리를 적용할 때, 정리가 성립하기 위한 조건을 명확히 명시하지 않은 경우가 많았고, 귀납법을 제대로 증명하는 학생이 별로 없었다. 문제를 풀때 수학적으로 명확한 근거를 제시하는 습관이 요구되고, 명제가 일반적으로 성립함을 보이는 훈련도 필요하다고 느꼈다.

$\boxed{\text{2011년 정시 14번}}$ 좌표공간에서 구면 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 과 평면 $x + 2y + z - 1 = 0$ 의 공통부분은 원이다. 이 원 위의 점 P 와 점 $A(0, 0, -2)$ 사이의 거리의 제곱 $\overline{PA}^2$ 의 최솟값, 최댓값을 구하시오.

[풀이] 마지막페이지에 첨부되어 있음.

[채점 기준]

[채점 소감]

$\boxed{\text{2011년 정시 15번}}$ 실수 a, b, c, d 에 대하여 부등식

$$|\ln(e^a + e^b) - \ln(e^c + e^d)| \le \max\{|a-c|, |b-d|\}$$

을 증명하시오. (여기에서 $\max\{\alpha, \beta\}$ 는 두 수 α, β 중 작지 않은 수를 뜻한다.)

[풀이] $\alpha = \max(|a-c|, |b-d|)$ 라 하자.

$$\frac{e^a + e^b}{e^c + e^d} = \frac{e^{a-c}}{1 + e^{d-c}} + \frac{e^{b-d}}{e^{c-d} + 1} \le \frac{e^\alpha}{1 + e^{d-c}} + \frac{e^\alpha}{e^{c-d} + 1} = e^\alpha \qquad (1)$$

따라서 $ln(e^a+e^b)-ln(e^c+e^d)\le\alpha$.

$$\frac{e^c+e^d}{e^a+e^b}=\frac{e^{c-a}}{1+e^{b-a}}+\frac{e^{d-b}}{e^{a-b}+1}\le\frac{e^\alpha}{1+e^{b-a}}+\frac{e^\alpha}{e^{a-b}+1}=e^\alpha \tag{2}$$

따라서 $ln(e^c+e^d)-ln(e^a+e^b)\le\alpha$.
위의 두 부등식(1),(2) 에 의해, $|ln(e^a+e^b)-ln(e^c+e^d)|\le\max(|a-c|,|b-d|)$.
(별해) $f(t)=ln(e^{c+t(a-c)}+e^{d+t(b-d)})$ 라 하자.
미적분학의 기본정리에 의하여 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}|ln(e^a+e^b)-ln(e^c+e^d)| &= |f(1)-f(0)|=|\int_0^1 f'(t)dt|\le\int_0^1|f'(t)|dt\\ &= \int_0^1|\frac{(a-c)e^{c+t(a-c)}+(b-d)e^{d+t(b-d)}}{e^{c+t(a-c)}+e^{d+t(b-d)}}|dt\\ &\le \max(|a-c|,|b-d|)\end{aligned}$$

[채점 기준] 문제의 난이도가 높아 부분점수를 받은 경우조차 거의 없었습니다. 단, a,b,c,d의 범위를 나누어 풀이를 시도하였으나 모든 경우에 대해 정확하게 증명하지 못한 경우는 5점 만 받을 수 있었습니다.

[채점 소감] 부분의 학생이 정확하게 풀이하지 못한 문제입니다. a,b,c,d의 범위를 나누어 풀이한 경우 극히 간단한 경우만 다루었으며, 'a가 가장 큰 수임을 가정하자' 등 일반적이지 않은 가정을 하여 문제를 접근한 경우도 많았습니다. 특히, $a-c\le b-d$ 일 때 $\frac{e^a+e^b}{e^c+e^d}\le e^{a-c}$임을 이용하는 등 자명하지 않은 사실을 정확한 증명없이 이용한 학생들이 많이 볼 수 있였습니다.

$\boxed{\text{2011년 정시 16번}}$ 행렬

$$\begin{pmatrix}(x+y)p-1 & 1-p\\ p & (x-y)(1-p)-1\end{pmatrix}$$

가 $x^2-y^2=1$ 인 모든 실수 x, y (단, $x\ne1$) 에 대하여 역행렬을 가지도록 하는 실수 p 의 값을 모두 구하시오.

[풀이] 2×2행렬의 역행렬이 존재한다는 것의 필요충분 조건은 행렬식이 0이 아닌 것이므로, 이를 수식으로 표현하면

$$((x+y)p-1)((x-y)(1-p)-1)-p(1-p)\ne0.$$

이 된다. 이를 정리하면,

$$-2py-x+y+1\ne0$$

이 된다. $x = 1$ 일 때를 제외했을 때 $x^2 - y^2 = 1$ 과 $-2py - x + y + 1 \neq 0$ 을 항상 만족하는 p를 찾아야 한다. 다시 말해서, $-2py - x + y + 1 = 0$과 $x^2 - y^2 = 1$ 해가 $x = 1, y = 0$ 뿐인 p를 찾아야 한다. $-2py - x + y + 1 = 0$을 x에 대해 정리하여 $x^2 - y^2 = 1$에 대입하면,

$$\begin{aligned} &((1-2p)y+1)^2 - y^2 = 1 \\ \Leftrightarrow \quad &(4p^2 - 4p)y^2 + 2(1-2p)y = 0 \end{aligned}$$

이 된다. 이로 부터 $y = 0$인 해를 갖는 p는 $0, 1$ 또는 $\frac{1}{2}$밖엔 없다. 이 p들을 $-2py - x + y + 1 = 0$에 대입하면,

$$\begin{cases} y = x - 1 & p = 0 \text{ 인 경우} \\ y = -x + 1 & p = 1 \text{ 인 경우} \\ x = 1 & p = \frac{1}{2} \text{ 인 경우} \end{cases}$$

이므로, 모든 경우에 $y = 0$인 경우 $x = 1$임을 확인 할 수 있다. 그러므로, $x^2 - y^2 = 1$인 모든 실수 x, y(단,$x \neq 1$)에 대해 주어진 행렬이 역행렬을 갖는 p는 모두 $0, 1, \frac{1}{2}$이다.

[채점 기준] 2×2행렬의 역행렬이 존재한다는 것의 필요충분 조건은 행렬식이 0이 아닌 것을 알고 있는지 여부를 확인하였고, 또한 주어진 행렬의 행렬식이 0이 아니면서 $x^2 - y^2 = 1$을 만족하도록 하는 p를 구할 때 명확한 이유를 제시하여 구하였는지 확인하는데 중점을 두었다. 답과 이유는 맞았으나 $p = 0, 1, \frac{1}{2}$만 가능하다는 것을 보이지 않은경우 감점하였다.

[채점 소감] 몇몇 학생들의 풀이에서 명확히 이유를 밝히지 않고, 대충 그림을 그려서 설명하거나 유추하여 답만 쓴 경우를 볼 수 있었다. 또한 많은 신입생들이 서술형 답안을 쓰는 것이 익숙하지 않다는 것을 알게 되었다. 실제로 본인이 정확히 알고 있다고 하더라도 채점자가 풀이를 알아볼 수 없도록 쓰면 원하는 점수를 받을 수 없으므로 학생들에게 평소에 문제를 풀 때 최대한 자세하고 명확하게 풀이를 쓰는 연습을 하라고 전하고 싶다.

2011년 수학성취도 측정시험 모범답안/채점기준/채점소감

(2011학년도 정시모집 합격자 대상)

2011년 2월 15일, 고사시간 90분

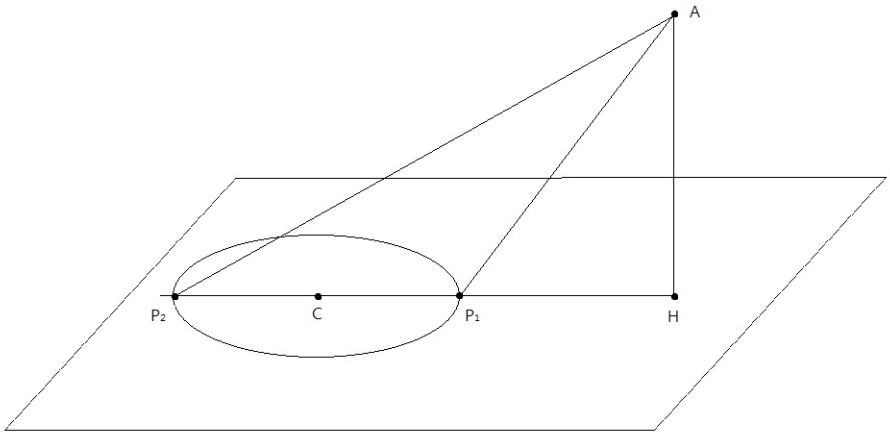
[모범답안]

C-14.

구면과 평면의 공통부분을 원 O라 하고, 그 중심을 C라 하자. 그리고 점 A에서 평면에 내린 수선의 발을 H, 직선 CH와 원 O와의 교점을 각각 P_1, P_2 라 하자. (단, H에 가까운 쪽을 P_1이라 둔다.)
그러면 $\overline{AH}^2$ 의 최솟값과 최댓값은 각각 $\overline{P_1A}$, $\overline{P_2A}$ 임을 알 수 있다. C와 H의 좌표는 각각 $(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6})$,$(\frac{1}{2}, 1, -\frac{3}{2})$이고
원 O의 반지름의 길이 r은 $\sqrt{\frac{5}{6}}$이므로

$$\overline{P_1A} = \overline{AH}^2 + (\overline{CH} - r)^2 = \frac{7}{3}$$

$$\overline{P_2A} = \overline{AH}^2 + (\overline{CH} + r)^2 = 9$$



(별해) $P = (a, b, c)$ 라 놓자.
그러면 $\overline{PA}^2 = a^2 + b^2 + (c+2)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 4c + 4 = 5 + 4c$이다.
따라서 c의 범위만 구하면 충분하다.

그런데 $a^2 + b^2 + c^2 = 1$이므로, $a^2 + b^2 = 1 - c^2$
$a + 2b + c - 1 = 0$이므로, $a + 2b = 1 - c$
By.Cauchy-Schwarz's inequality

$$(1^2 + 2^2)(a^2 + b^2) \geq (a + 2b)^2$$
$$\Rightarrow 5(1 - c^2) \geq (1 - c)^2$$
$$\Rightarrow 0 \geq 3c^2 - c - 2 = (c - 1)(3c + 2)$$
$$\Rightarrow -\frac{2}{3} \leq c \leq 1$$
$$\Rightarrow \frac{7}{3} \leq 4c + 5 \leq 9$$

[채점기준]
감점된 경우
- 점 A와 점 P_2를 잇는 직선이 원점을 지난다는 사실을 바로 쓴 경우 점수를 다 받지 못하였음.
- 서술형 문항의 특성상 풀이에 대한 설명이 지나치게 적은 경우 점수를 다 받지 못하였음.
- 계산 실수

[채점소감]
꽤 많은 학생들이 직선 P_2A위에 원점이 있다고 생각했다. 운이 좋게도 이 문제에선 그렇게 생각하고 구해도 답이 일치하고, 실제로 이 직선이 원점을 품고 있다. 하지만 일반적으로 맞는 명제가 아니기 때문에, 위와 같은 논리로 답을 구한 학생을 감점을 하였다. 대부분의 학생들이 그림을 잘 그려, 모범답안과 비슷한 과정으로 답을 잘 구했다. 특히 소수의 학생들은 코시 슈바르

츠 부등식을 잘 이용하여 문제를 풀었다. 최댓 최솟값을 제대로 구한 학생들은 많았지만, 만점을 받은 학생은 많지 않았다. 서술형 문제의 답안을 작성하는데, 좀 더 신경써야 할 것이다.