2011학년도 수학성취도 측정시험

(2011학년도 수시모집 합격생 대상)

2010년 12월 17일, 고사시간 90분

- 1번부터 11번까지는 단답형이고, 12번부터 16번까지는 서술형입니다.
- 답안지는 깨끗한 글씨로 바르게 작성하되, 단답형은 답만 쓰고, 서술형은 풀이과정과 답을 명시하시오.
- 총 배점은 100점이고, 각 문항의 배점은, 기본문제(1-6번) 각 3점, 발전문제(7-13번) 각 7점, 심화문제(14번-16번) 각 11점입니다.

2011년 수시 1번 $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n+1}{2n^2+9} = \boxed{}$.

[풀이] $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n+1}{2n^2+9} = \frac{1}{2}$

2011년 수시 2번 함수 $f(x) = x^5 + 2x^{\frac{3}{2}}$ 의 도함수 $f'(x) = \boxed{}$ 이다.

[풀이] $f'(x) = 5x^4 + 3\sqrt{x}$

2011년 수시 3번 정적분 $\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin(x^2)\,dx$ 의 값은 $\boxed{}$ 이다.

[풀이] $\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin(x^2)dx = \Big[-\frac{1}{2}\cos(x^2)\Big]_0^{\sqrt{\pi}} = -\frac{1}{2}\cos\pi + \frac{1}{2}\cos 0 = 1$

2011년 수시 4번 행렬 $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 와 $G = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 에 대하여 행렬 H가 $FHF^{-1} = G$ 를 만족하면, $H^{10} = \boxed{}$ 이다.

[풀이]

$$\begin{aligned} H = F^{-1}GF &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ H^{10} &= \begin{pmatrix} 1 & 20 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

[채점 소감] $H^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 2^{10} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 으로 쓴 학생들이 많았다.

$\boxed{\text{2011년 수시 5번}}$ 좌표공간 위의 세 점 $O(0,0,0)$, $A(1,-1,0)$, $B(2,1,3)$ 에 대하여 $\angle AOB = \theta$ 이면, $\cos\theta = \boxed{}$ 이다.

[풀이] 코사인 제2법칙으로부터

$$\cos\theta = \frac{\overline{AO}^2 + \overline{BO}^2 - \overline{AB}^2}{2\overline{AO}\cdot\overline{BO}} = \frac{2+14-14}{2\sqrt{2}\sqrt{14}} = \frac{1}{2\sqrt{7}}$$

$\boxed{\text{2011년 수시 6번}}$ 평면 $x-3y+z=3$ 과 직선 $x=y=z-1$ 의 교점은 $\boxed{}$ 이다.

[풀이] $x=y=z-1$을 대입하면 $(z-1)-3(z-1)+z=3$ 으로부터 $z=-1$을 얻고 이를 이용하면 $x=y=-2$임을 알 수 있다. 따라서 $(-2,-2,-1)$.

$\boxed{\text{2011년 수시 7번}}$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{3n}\frac{1}{n}\cos\frac{k\pi}{n}\sin\frac{2k\pi}{n} = \boxed{}$.

[풀이]

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{3n}\frac{1}{n}\cos\frac{k\pi}{n}\sin\frac{2k\pi}{n} &= \int_0^3 \cos\pi x\sin 2\pi x\ dx\\ &= \int_0^3 2\cos^2\pi x\sin\pi x\ dx\\ &= \Big[-\frac{2}{3\pi}\cos^3\pi x\Big]_0^3\\ &= \frac{4}{3\pi}\end{aligned}$$

$\boxed{\text{2011년 수시 8번}}$ $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{\ln x}^{x^2}\sqrt{1+t^4}\,dt = \boxed{}$.

[풀이]

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_{\ln x}^{x^2}\sqrt{1+t^4}\ dt &= \sqrt{1+(x^2)^4}\frac{d}{dx}(x^2)-\sqrt{1+(\ln x)^4}\frac{d}{dx}(\ln x)\\ &= 2x\sqrt{1+x^8}-\frac{1}{x}\sqrt{1+(\ln x)^4}\end{aligned}$$

$\boxed{\text{2011년 수시 9번}}$ 좌표공간에서 입체도형 S 가 다음과 같이 정의되어 있다.

$$S=\left\{(x,y,z)\mid \frac{x^2}{2t}+y^2\le 1,\ z=t,\ \frac{1}{2}\le t\le 1\right\}$$

이 때, S 의 부피는 $\boxed{}$ 이다.

[풀이] 고정된 z에 대한 단면은 $\dfrac{x^2}{2z}+y^2\le 1$으로 장축이 1, 단축이 $\sqrt{2z}$인 타원이다. 이 단면의 넓이는 $-\sqrt{2z}\sqrt{1-y^2}\le x\le\sqrt{2z}\sqrt{1-y^2}$ 로부터 $\displaystyle\int_{-1}^{1}2\sqrt{2z}\sqrt{1-y^2}\ dy$로 계산할 수 있다. 따라서 S의 부피는

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_{-1}^{1}2\sqrt{2z}\sqrt{1-y^2}\ dydz &= \int_{\frac{1}{2}}^{1}2\sqrt{2z}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-y^2}\ dydz\\ &= \int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{2z}\pi\ dz\\ &= \Big[\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi z^{\frac{3}{2}}\Big]_{\frac{1}{2}}^{1}\\ &= \frac{\pi}{3}(2\sqrt{2}-1)\end{aligned}$$

$\boxed{\text{2011년 수시 10번}}$ $\int_0^{\pi}e^{2x}\sin 3x\,dx = \boxed{}$.

[풀이]

$$\begin{aligned} I &:= \int_0^{\pi} e^{2x}\sin 3x dx \\ I &= \Big[\frac{e^{2x}}{2}\sin 3x\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{3}{2}e^{2x}\cos 3x dx \\ &= -\Big\{\Big[\frac{3}{4}e^{2x}\cos 3x\Big]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{9}{4}e^{2x}\sin 3x dx\Big\} \\ &= -\Big(-\frac{3}{4}e^{2\pi} - \frac{3}{4}\Big) - \frac{9}{4}I \\ I &= \frac{3}{13}(e^{2\pi}+1) \end{aligned}$$

$\boxed{\text{2011년 수시 11번}}$ 벡터 $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ 의 크기가 각각 $|\vec{a}| = 2,\ |\vec{b}| = \sqrt{7},\ |\vec{c}| = 1$ 이고 등식 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ 을 만족한다. 이 때 $\vec{a}$ 와 $\vec{c}$ 가 이루는 각의 크기는 $\boxed{}$ 이다.

[풀이]

$$\begin{aligned} \vec{a}+\vec{c} &= -\vec{b} \\ (\vec{a}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{c}) &= (-\vec{b})\cdot(-\vec{b}) \\ |\vec{a}|^2+|\vec{c}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{c} &= |\vec{b}|^2 \\ 4+1+2\vec{a}\cdot\vec{c} &= 7 \\ \vec{a}\cdot\vec{c} &= 1 \end{aligned}$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{c}|} = \frac{1}{2} \qquad \theta = \frac{\pi}{3}$$

$\boxed{\text{2011년 수시 12번}}$ 타원 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ 의 두 초점 A, B 와 타원 위의 점 P 에 대하여 두 선분 $\overline{AP}, \overline{BP}$ 의 길이의 곱의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

[풀이] 타원의 성질을 이용한 풀이.
P를 타원위의 임의의 한 점이라고 하고, $\overline{AP} = a,\quad \overline{BP} = b$ 라고 하자. 타원의 성질에 의해 $a+b=10$이 성립하므로 두 선분 $\overline{AP}, \overline{BP}$의 길이의 곱은

$$\begin{aligned} \overline{AP}\times\overline{BP} &= ab \\ &= a(10-a) \\ &= -a^2+10a \\ &= -(a-5)^2+25. \end{aligned}$$

이때, P를 택할 수 있는 범위가 $(-5,0)$부터 $(5,0)$까지 연속적으로 분포되어 있으므로, a의 범위가 $2 \le a \le 8$ 가 되어 최소값:16, 최대값 25임을 알 수 있다.

[다른 풀이] 타원의 매개화를 이용한 풀이.
P가 타원 위의 점이므로

$$P = (5\cos\theta, 4\sin\theta), \quad (0 \le \theta < 2\pi)$$

로 매개화 하여 표현할 수 있다. 문제에서의 타원의 초점이 A=(-3,0), B=(3,0)과 같이 구해지므로 두 점 사이의 거리 공식을 이용하면

$$\begin{aligned}\overline{AP} \times \overline{BP} &= \sqrt{(5\cos\theta+3)^2 + 4^2\sin^2\theta}\sqrt{(5\cos\theta-3)^2 + 4^2\sin^2\theta} \\ &= \sqrt{(9\cos^2\theta - 25)^2} \\ &= |9\cos^2\theta - 25|\end{aligned}$$

이 때 $cos^2\theta$ 의 범위가 $0 \le \cos^2\theta \le 1$이 되므로 최소값이16, 최대값이 25 임을 알 수 있다.

[채점 기준] 이 문제의 만점은 7점으로 채점되었으며 최대값, 최소값 중 한가지만 정답시 3점, 두가지 모두 정답시 7점으로 처리하였습니다. 하지만, 정답이 맞았을 경우에도 풀이 없이 답만을 기재하였거나, 풀이의 이유가 타당하지 않았을 경우, 또는 논리적인 결함은 없으나 풀이가 상세하지 않아 학생이 이 정답을 제대로 이해하고 풀었다는 증거가 없을 시에도 오답으로 처리하였습니다. 특히 풀이중 변수의 범위가 최소값과 최대값을 구하는 과정에서 중요하게 작용하기 때문에 범위 오답시, 답이 맞았을 경우에도 3점으로 채점하였습니다. 물론, 위에서 소개한 풀이 외의 다른 풀이에 대해서도 논리적 오류가 없을 시 정답처리 하였습니다.

[채점 소감] 이 문제의 경우, 정확한 풀이과정을 몰라도 쉽게 답을 추측할 수 있는 문제였습니다. 따라서 대부분의 학생들이 정답을 기재하였습니다. 그래서 일부 학생들이 직관적으로 답을 추측하여 엄밀한 단계를 생략하고 답안을 작성하였으므로 답보다는 과정에 중점을 두고 채점하게 되었습니다. 타원방정식의 성질중 타원 위의 점에서 두 초점사이의 거리의 합이 일정하다는 것은 학생들도 기본적으로 많이 공부한 내용일 것입니다. 하지만 그 성질을 문장 그대로로 받아들여서, 두 초점사이의 거리에 관한 관계식이라는 이해가 조금 부족한 듯 보여 아쉬움이 남았었습니다.

$\boxed{\text{2011년 수시 13번}}$ 다음 세 조건을 모두 만족하는 함수 $f(x)$ 를 구하시오.

(a) $f(x)$ 는 실수 전체에서 연속이다.
(b) $f(0) = 3$.
(c) 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) = f\left(\dfrac{x}{2}\right)$ 이다.

[풀이] 임의의 실수 a에 대하여 $f(a) = f(\frac{a}{2}) = \cdots = f(\frac{a}{2^n})$ 이므로

$$\begin{aligned} f(a) &= \lim_{n\to\infty} f(a) = \lim_{n\to\infty} f(\frac{a}{2^n}) \\ &= f(\lim_{n\to\infty}(\frac{a}{2^n})) \ (\because f : \text{연속}) \\ &= f(0) = 3 \end{aligned}$$

$\therefore f(x) = 3$

[채점 기준] 풀이과정에서 극한을 이용하고 함수의 연속성을 분명히 언급한 경우에만 점수를 주었다.

[채점 소감] 함수의 연속성의 정의를 극한으로 정확하게 표현한 학생이 의외로 적었다.
답이 상수함수가 되는 것을 예측한 학생들은 많았으나 적절한 근거를 댄 학생은 많지 않았다.

$\boxed{\text{2011년 수시 14번}}$ 실수 전체에서 미분가능한 단조증가함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족한다.

(1) $f(0) = 2,\ f(1) = 3.$
(2) 도함수 $f'(x)$ 는 연속이다.
(3) 모든 $x \in [0, 1]$ 에 대하여 $f(x)^2 - g(x)^2 = 1$ 이다.

아래 적분값을 구하시오.

$$\int_0^1 \frac{f(x)g'(x) - f'(x)g(x)}{f(x)^2 g(x)}\, dx$$

[풀이] $f(x)^2 - g(x)^2 = 1$ 이므로 양변을 미분하면, $2f(x)f'(x) - 2g(x)g'(x) = 0$ 이다. 따라서,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{f(x)g'(x) - f'(x)g(x)}{f(x)^2 g(x)} dx &= \int_0^1 \Big(\frac{g(x)}{f(x)}\Big)' \frac{1}{g(x)} dx \\ &= \Big[\frac{g(x)}{f(x)} \cdot \frac{1}{g(x)}\Big]_0^1 + \int_0^1 \frac{g(x)}{f(x)} \cdot \frac{g'(x)}{g(x)^2} dx \\ &= \Big[\frac{1}{f(x)}\Big]_0^1 + \int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)^2 - 1} dx \\ &= \Big[\frac{1}{f(x)}\Big]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \Big(\frac{f'(x)}{f(x) - 1} - \frac{f'(x)}{f(x) + 1}\Big) dx \\ &= \Big[\frac{1}{f(x)}\Big]_0^1 + \frac{1}{2}\big[\log(f(x) - 1) - \log(f(x) + 1)\big]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}\log\frac{3}{2} - \frac{1}{6} \end{aligned}$$

[채점 기준] * 적분 계산과정에서 틀린 경우나 오류가 있을 시 감점.
* $g(x)g'(x) = f(x)f'(x)$에서 $f'(x)$ 또는 $g'(x)$가 분모에 있는 식으로 표현한 경우는 감점.

[채점 소감] * 부분 적분이나 치환 적분에서 계산 실수가 많았음.
* 치환을 이용한 다양한 풀이(예:삼각함수)들이 있었음.
* $f(x)$가 단조증가함수라는 것과 $f'(x) > 0$인 것은 동치조건이 아님.
즉, $f'(x) > 0$이면 $f(x)$는 단조증가함수지만, $f(x)$가 단조증가이면 $f'(x) = 0$이 되는 점이 존재할 수도 있음.(예: $f(x) = x^3$은 단조증가함수지만 $f'(0) = 0$.) 따라서, $f'(x)$나 $g'(x)$가 분모에 들어간 경우는 감점하였음.

$\boxed{\text{2011년 수시 15번}}$ 좌표공간에 들어있는 반지름이 1 인 구면 위에서 움직이는 세 점 A, B, C에 대하여 내적 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ 의 최솟값을 구하시오.

[풀이] 구의 중심을 O라 두자. 그러면 구하려는 값은,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}) \\
&= 1 + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} - (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \cdot \overrightarrow{OA} \\
&= \frac{1}{2}(|\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{OC}|^2) - \frac{1}{2} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} - (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \cdot \overrightarrow{OA} \\
&= \frac{1}{2}|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}|^2 - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

따라서 최소값은,

$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = 0$$

일 때, $-\frac{1}{2}$이다. 예를 들어, 일반성을 잃지 않고 B와 C가 xy-평면 위의 점이라 두면 이 식에 의해 A도 xy-평면 위에 있어야 한다. 다시 일반성을 잃지 않고 $A = (1, 0, 0)$라 두면, B와 C는 x축 대칭이고 $\triangle OAB$, $\triangle OAC$가 정삼각형이어야 함을 알 수 있다. 실제로 $A = (1, 0, 0)$, $B = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0)$,$C = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$ 일 때, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}$가 된다.

[채점 기준] $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$가 음수가 될 수 있으므로, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$의 최소값은 A, B, C가 대원 위에 있을 때 발생한다. 왜냐하면 음수의 경우 절대값이 클수록 작은 수가 되기 때문이다. 따라서 일반성을 잃지않고 점 A, B, C를 좌표평면의 단위원 위의 세 점이라 생각해도 무방하다. 또한

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} - (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \cdot \overrightarrow{OA}$$

으로부터, $\overrightarrow{OA}$와 $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$가 평행해야 함을 알 수 있다. 일반성을 잃지 않고 $A = (1, 0, 0)$으로 두면, B, C는 x축 대칭이 되어야 한다. 이제 구하려는 값을 하나의 변수에 대한 함수로 적을 수 있다.

이렇게 풀이를 적은 경우, 왜 간단한 상황만 생각하여도 되는지, 이유를 명기하지 않으면 감점하였다. 기타 다른 풀이의 경우 부등식을 적어내려갈 때, 위와 같이 실제로 등호가 성립하는 경우를 명시하지 않으면 역시 감점하였다.

[채점 소감] 많은 학생들이 A에 대해 B와 C가 대칭적인 위치에 있어야 최소값이 발생한다는 사실을 예측했으나, 이를 정확히 논증하지 못했다. 또한 부등식을 이용할 때, 부등식과 관련한

기하학적 현상에 대한 고찰이 없는 경우가 많았다. 따라서 이 경우 언제 최소값이 발생하는지를 밝히지 못한 학생들이 있었다.

모범 답안으로 제시한 풀이는 다소 기교적인 부분이 있지만, 문제의 상황을 자세히 관찰해 보면 문제를 보다 간단한 경우로 축소할 수 있다. 예를 들어 점 A, B, C가 대원 위에 있어야함은 조금만 생각해 보면 자명하다. 또한 A에 관해 B와 C가 대칭적인 위치에 있어야함도 어렵지 않게 증명할 수 있다. 다만 이 경우 이러한 사실들에 대한 정확한 논증이 꼭 뒷받침 되어야 함을 다시 한번 강조하는 바이다.

$\boxed{\text{2011년 수시 16번}}$ $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 으로 주어질 때, 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n \le a_{n+1}$ 이 성립함을 보이시오.

[풀이]

(1) (미적분학 교재에 나와있는 풀이)

$$\begin{aligned}
a_n = (1+\frac{1}{n})^n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}(\frac{1}{n})^k \\
&= 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n}) \\
&= 2 + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n}) \\
&\le 2 + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n+1})\cdots(1-\frac{k-1}{n+1}) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}(\frac{1}{n+1})^k \\
&= a_{n+1}
\end{aligned}$$

(2) (산술기하평균을 이용한 풀이)

$$\begin{aligned}
((1+\frac{1}{n})^n)^{\frac{1}{n+1}} &= (1\cdot(1+\frac{1}{n})\cdots(1+\frac{1}{n})) \\
&\le \frac{1+(1+\frac{1}{n})+\cdots+(1+\frac{1}{n})}{n+1} \\
&= 1+\frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

양 변에 $n+1$승을 하면,

$$(1+\frac{1}{n})^n \le (1+\frac{1}{n+1})^{n+1}$$

(3) (미분을 이용한 풀이)

$f(x) = (1+\dfrac{1}{x})^x$라 하자($x \geq 1$). 그럼

$$f'(x) = (1+\frac{1}{x})^x(\log(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{x+1})$$

이다.

$h(x) = \log(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{x+1}$라 하자. 그럼,

$$h'(x) = -\frac{1}{(1+x)x} + \frac{1}{(1+x)^2} \leq 0$$

이고,

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = 0$$

임으로,

$h(x)$는 양수이고, 따라서 $f'(x)$가 양수가 되어, $f(x)$는 증가함수이다. 따라서

$$a_n = f(n) \leq f(n+1) = a_{n+1}$$

[채점 기준]

(1) 3번 풀이에서 평균값의 정리를 이용하여 $h(x)$가 양수임을 보여도 됨.

(2) 3번 풀이에서 f의 미분을 잘 구한경우 4점, 나머지는 부분점수 없음.

[채점 소감] 의외로 많은 학생들이 풀었고 풀이도 다양하였다. 특히 위의 풀이 외에도 드물게 베르누이 부등식을 이용한 경우나 귀납법을 사용하요 증명을 한 경우도 있었다. 풀이를 틀린 학생들의 경우 귀납법을 시도하는 하면서 중간에 포기한 학생도 있었고 귀납법을 제대로 이해하지 못하고 $n = k$ 일때 성립한다고 가정하고 n 에 $k+1$ 대입하면 성립하므로 증명을 하였다고 서술한 학생들도 있었다. 향후 미적분학 교육에서 학생들에의 전체 수준을 끌어 올리는 것도 중요하지만 조금 부족한 학생들을 실력을 향상시키는 교육에도 신경을 써야 할 것 같다. 그리고 학생들의 답안을 보면 보여야 할 것을 보이지 않고 성립한다고 말로 때운 학생들도 많은데 조교들이 미적분학 수업에서 이런 답안 작성 요령은 심각한 감점 요인이 됨을 반드시 주지시켜야 할 것 같다.