2012학년도 수학성취도 측정시험 (정시) 문제지

(2012년 2월 16일 시행, 고사시간 90분)

- 1번부터 11번까지는 단답형이고, 12번부터 16번까지는 서술형입니다.
- 답안지는 단정한 글씨로 작성하되, 단답형은 답만 쓰고, 서술형은 풀이과정과 답을 명시하시오.

〈 연습용 여백 〉

A. 기본문제(각3점씩, 총 18점)

A-1. $\lim_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} = \boxed{}$.

A-2. 함수 $f(x) = \dfrac{x^3}{x+1}$ 의 도함수 $f'(x) = \boxed{}$ 이다.

A-3. 정적분 $\displaystyle\int_{-1}^{1} xe^{-x}dx$ 의 값은 $\boxed{}$ 이다.

A-4. 행렬 $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 가 나타내는 일차변환에 의하여 점 $(-1, 7)$ 로 옮겨지는 점의 좌표는 $\boxed{}$ 이다.

A-5. 좌표공간의 세 점 $A(1,0,1)$, $B(2,1,0)$, $C(3,5,2)$ 를 지나는 평면의 방정식은 $\boxed{}$ 이다.

A-6. 직선 $x-4 = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{2-z}{2}$ 와 평면 $3x+2y+z=1$ 이 이루는 각을 θ 라고 할 때 $\sin\theta = \boxed{}$ 이다.

B. 발전문제(각7점씩, 총 49점)

B-7. n 이 자연수일 때, 구간 $0 \le x \le (2n+1)\pi$ 에서 함수 $y = e^{-x}\sin x$ 의 극댓값의 합을 S_n 으로 두면, $\lim_{n\to\infty} S_n = \boxed{}$ 이다.

B-8. a 와 b 가 상수이고, 함수 $f(x) = x^5 + ax^3 + bx + 1$이 $x = -1, 1$ 에서만 극값을 가지고, 극댓값과 극솟값의 차가 4 이면, 상수 $a = \boxed{}$, $b = \boxed{}$ 이다.

B-9. 정사각행렬 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 와 단위행렬 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 가 $A + A^2 + \cdots + A^{2011} = -E$ 를 만족하고, $A^{1006} - E$ 의 역행렬이 존재하면, $A^{1006} = \boxed{}$ 이다.

B-10. 제 1 사분면에서 점 (a, b) 가 포물선 $y^2 = 4px$ (단, $p > 0$)에 놓여 있을 때, 포물선과 두 직선 $x = 0$, $y = b$ 로 둘러싸인 도형을 A, 포물선과 두 직선 $x = a$, $y = 0$ 으로 둘러싸인 도형을 B 라고 하자. A 를 y-축의 둘레로 회전한 회전체의 부피를 V_A, B 를 y-축 둘레로 회전한 회전체의 부피를 V_B 라 하면, $\dfrac{V_A}{V_B} = \boxed{}$ 이다.

B-11. 영역 $D = \{(x, y) \mid 5x^2 + 5y^2 - 6xy \le 8\}$ 의 넓이는 $\boxed{}$이다. (도움말 : $45°$ 회전변환)

★ 12번부터 16번까지는 서술형입니다. ★

B-12. $n \geq 2$ 에 대하여 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$ 이라 할 때, $a_{n+1} < a_n$ 임을 보이시오.

B-13. 항상 양의 값을 가지는 연속 함수 $g(x)$에 대해 다음 적분값을 구하시오.

$$\int_0^{2012} \frac{g(x)}{g(x) + g(2012 - x)} dx$$

C. 심화문제(각11점씩, 총 33점)

C-14. 반지름이 $15cm$ 인 반구 모양의 그릇에 물이 가득 차 있다. 그릇의 가장 깊은 부분에 조그만 구멍이 나 있어서, 그 구멍으로 물이 빠져 나가는데, 물이 빠져 나가는 속도는 그릇에 차 있는 물의 깊이에 비례한다. 그릇에 물을 가득 채우고 2 시간이 지났을 때 물의 깊이가 $10cm$ 였다. 그릇에 가득 차 있던 물이 구멍을 통하여 다 빠져나가는 데 필요한 시간을 구하시오.

C-15. 좌표공간에서 다음 영역의 부피를 구하시오.

$$\{(x, y, z) \mid x^2 + zy^2 \leq |z|,\ -1 \leq y \leq 1,\ -1 \leq z \leq 1\}$$

(단, $\int_0^1 \sqrt{1 + t^2}\, dt = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})\right)$ 이다.)

C-16. 좌표공간에 세점 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 1, -2)$, $B(-2, 3, 5)$ 가 주어져 있다. P 는 A 를 중심으로 하고 반지름 1 인 구면상의 동점이고, Q 는 B 를 중심으로 하고 반지름 3 인 구면상의 동점이다. $3\overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{BQ}$ 일때, $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ 의 최댓값을 구하시오.

〈 연습용 여백 〉