2013학년도 수학성취도 측정시험

(2013학년도 정시모집 및 외국인특별전형 합격자 대상)

2013년 2월 18일, 고사시간 90분

- 1번부터 11번까지는 단답형이고, 12번부터 16번까지는 서술형입니다.
- 답안지는 깨끗한 글씨로 바르게 작성하되, 단답형은 답만 쓰고, 서술형은 풀이과정과 답을 명시하시오.
- 총 배점은 100점이고, 각 문항의 배점은, 기본문제(1-6번) 각 3점, 발전문제(7-13번) 각 7점, 심화문제(14번-16번) 각 11점입니다.

$\boxed{\text{2013년 정시 1번}}$ 벡터 $\vec{a} = (1, 0, -1)$, $\vec{b} = (3, 4, -5)$ 가 이루는 각의 크기를 θ 라고 할 때, $\cos\theta = \boxed{}$ 이다.

[풀이] $\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \dfrac{8}{\sqrt{2}\sqrt{50}} = \dfrac{4}{5}$

$\boxed{\text{2013년 정시 2번}}$ $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \boxed{}$.

[풀이] $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = 0$

$\boxed{\text{2013년 정시 3번}}$ 함수 $f(x) = x^3 - ax^2 + 4x + 7$ 가 $(-\infty, \infty)$ 에서 증가함수이기 위한 a 값의 범위는 $\boxed{}$ 이다.

[풀이] $f'(x) = 3x^2 - 2ax + 4$

$$\begin{aligned} \text{함수 } f(x) \text{ 가 증가함수} &\Leftrightarrow \text{모든 실수 } x \text{ 에 대해 } f'(x) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \text{판별식} = 4(a^2 - 12) \leq 0 \end{aligned}$$

$\therefore -2\sqrt{3} \leq a \leq 2\sqrt{3}$

$\boxed{\text{2013년 정시 4번}}$ $\displaystyle\int_0^1 xe^{x^2}\,dx = \boxed{}$.

[풀이] $t = x^2$ 로 치환하면,

$$(\text{준식}) = \int_0^1 \frac{e^t}{2}\,dt = \frac{1}{2}(e-1)$$

$\boxed{\text{2013년 정시 5번}}$ 행렬 $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}$ 이 나타내는 일차변환 f 에 대하여, $f(P) = P$ 를 만족하는 점 P 의 자취의 방정식은 $\boxed{}$ 이다.

[풀이] $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \; y = -\dfrac{2}{5}x$

$\boxed{\text{2013년 정시 6번}}$ 좌표평면 위를 운동하는 점 $P(x, y)$ 의 시각 t 에서의 위치가

$$x = 2t, \qquad y = 4t^2 - t$$

라 하면, $t = 1$ 일 때 점 P 의 속력은 $\boxed{}$ 이다.

[풀이] 속력 $= \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \sqrt{2^2 + (8t-1)^2}$
$\therefore t = 1$ 에서의 속력은 $\sqrt{53}$

$\boxed{\text{2013년 정시 7번}}$ 항상 양의 값을 갖는 미분가능한 함수 f 가 모든 실수 x, y 에 대하여 $f(x+y) = 4f(x)f(y)$ 을 만족하고 $f'(0) = 3$ 이면,

$$\frac{f'(2013)}{f(2013)} = \boxed{}$$

이다.

[풀이] $x,\ y = 0$ 을 대입하면, $f(0) = \dfrac{1}{4}$ ($\because$ 함수값이 항상 양의 값을 가짐)
주어진 조건에 의해, $f(x+h) = 4f(x)f(h)$
양변에 $f(x)$ 을 빼면

$$f(x+h) - f(x) = 4f(x)\left\{f(h) - \frac{1}{4}\right\}$$

h 로 나눠주면

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 4f(x)\,\frac{f(h) - \frac{1}{4}}{h} = 4f(x)\,\frac{f(h) - f(0)}{h}$$

h 를 0 으로 보내면,

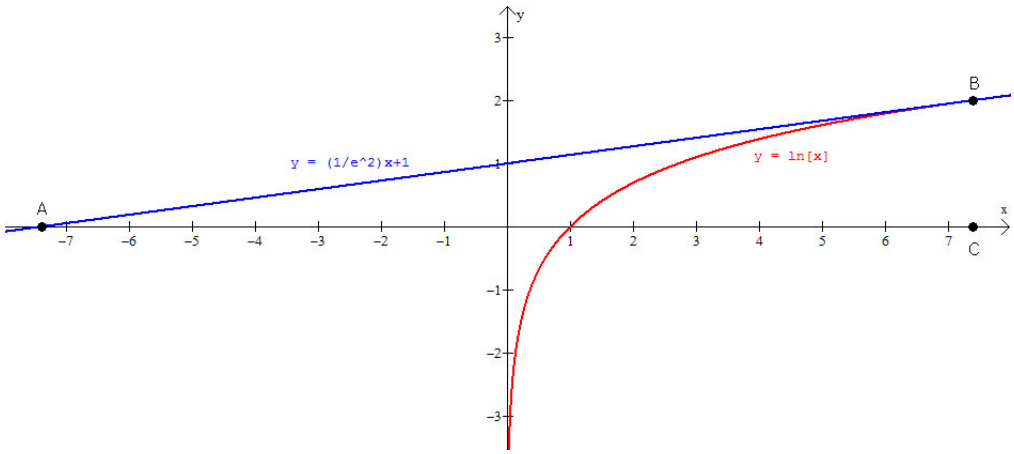
$$f'(x) = 4f(x)f'(0) \quad \therefore \frac{f'(2013)}{f(2013)} = 12$$

$\boxed{\text{2013년 정시 8번}}$ 점 $(0, 1)$ 에서 곡선 $y = \ln x$ 에 그은 접선과 이 곡선 및 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 $\boxed{}$ 이다.

[풀이] 곡선 $y = \ln x$ 위의 임의의 점 $(a,\ \ln a)$ 위에서의 접선의 방정식은

$$y - \ln a = \frac{1}{a}(x - a)$$

이 직선이 점 $(0,\ 1)$ 을 지나야 하므로 $a = e^2$ 이다.



이 직선이 x축과 만나는 점을 A, 곡선 $y = \ln x$ 와 만나는 점을 B, 그리고 점 B 를 x축에 정사영시킨 점을 C 라고 하면, 삼각형 ABC 의 넓이는 $2e^2$ 이고,
곡선 $y = \ln x$ 아래 부분의 넓이는 $\displaystyle\int_1^{e^2} \ln x\, dx = \Big[x\ln x - x\Big]_1^{e^2} = e^2 + 1$ 이다.
$\therefore$ 구하고자 하는 넓이 $= 2e^2 - (e^2 + 1) = e^2 - 1$

$\boxed{\text{2013년 정시 9번}}$ 행렬 $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ 에 대하여 $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ 이면,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + b_n + c_n + d_n}{10^n} = \boxed{}$$

이다.

[풀이] $A^{n+1} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n + 2b_n & 4a_n + 3b_n \\ c_n + 2d_n & 4c_n + 3d_n \end{pmatrix}$
$\Rightarrow a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} + d_{n+1} = 5(a_n + b_n + c_n + d_n)$
이로부터 $a_n + b_n + c_n + d_n = 10 \cdot 5^{n-1}$ 임을 알 수 있다.
$\therefore \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 2$

$\boxed{\text{2013년 정시 10번}}$ 실수 $x \geq 1$ 에 대하여, 부등식

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 \leq x < 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2$$

을 만족하는 자연수 n 을 $f(x)$ 라 하면, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\sqrt[3]{x}} = \boxed{}$ 이다.

[풀이] $1+2+3+\cdots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 임을 이용하면,
샌드위치 정리에 의해

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{f(x)^3} = \frac{1}{3}$$

을 쉽게 보일 수 있고, 극한의 성질에 따라

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\sqrt[3]{x}} = \sqrt[3]{3}$$

을 알 수 있다.

$\boxed{\text{2013년 정시 11번}}$ 좌표평면에서 다음 매개변수 방정식으로 주어진 곡선과 x 축 및 $x = \dfrac{\pi}{2}$ 로 둘러싸인 영역의 넓이는 $\boxed{}$ 이다.

$$x = t\sin t, \quad y = \sin t, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$$

[풀이]

$$\begin{aligned}
\text{영역의 넓이} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} y\,dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\, d(t\sin t) \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t(\sin t + t\cos t)\,dt \\
&= \frac{3\pi}{8} \quad (\text{부분적분 이용})
\end{aligned}$$

[채점 기준] 모두 단답형 문제이므로, 부분 점수는 없습니다.

[채점 소감] 단답형 문제 A형은 상대적으로 간단한 원리만으로 풀리는 문제였기 때문에 대부분의 학생들이 정답을 맞추었습니다. 특히 몇몇 문제는 간단한 정의만으로도 풀리는 문제였음에도 불구하고 틀리는 학생들이 있었습니다. 반드시 검산하는 습관을 갖도록 하여야 하겠습니다.

B형 문제의 경우 기본적인 문제에서 벗어나 조금 더 생각하고 응용을 해야하는 문제들이었습니다. 가령 8번의 경우 접선의 식을 세우는 것을 로그함수에서 시작해야 좀 더 쉽게 다가갈 수 있다는 점, 9번의 경우 각 항의 합에 대한 수열을 생각해야 한다는 점과 같이 각 문제의 핵심을 잘 이해하고 문제풀이를 하는 것이 중요합니다.

전체적인 학생들의 정답률은 나쁘지 않았다고 생각합니다. 하지만 몇몇 학생의 경우, 아주 기초적인 문제에도 답을 맞추지 못한 점을 볼 때, 기본적인 정의의 중요성을 다시 상기해야 할 것입니다.

$\boxed{\text{2013년 정시 12번}}$ 함수 $f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 3x$ 에 대하여

(1) f 의 역함수가 존재함을 보이시오.

(2) 다음 부등식이 성립함을 보이시오.

$$\int_0^2 f(x)dx + \int_0^{10} f^{-1}(x)dx < 40$$

[풀이]

(1) 주어진 함수

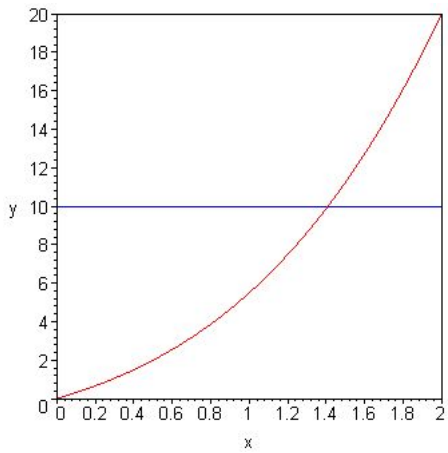
$$f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 3x$$

를 미분하면,

$$f'(x) = 3x^2 + 3x + 3 = 3(x^2 + x + 1)$$

이므로, $f'(x)$ 는 항상 양수이다. 함수 $f(x)$ 는 구간 $[0, 1]$ 에서 단조증가하므로, 일대일 함수이고 역함수가 존재한다.

(2) 함수 $f(x)$ 의 그래프는 아래와 같다.



위 그림에서 $\int_0^2 f(x)\,dx$ 는 x축과 $x = 2,\ y = f(x)$ 로 둘러싸인 부분의 넓이이며, $\in^1 0_0$ $f^{-1}(x)\,dx$ 는 y축과 $y = 10,\ y = f(x)$ 로 둘러싸인 부분의 넓이이다.
이로부터 값

$$\int_0^2 f(x)\,dx + \int_0^{10} f^{-1}(x)\,dx$$

는 원점과 $(2,\ 20)$ 을 끝점으로 하는 직사각형의 넓이보다 작다는 것을 알 수 있다. 따라서,

$$\int_0^2 f(x)\,dx + \int_0^{10} f^{-1}(x)\,dx < 40$$

이 성립한다.

[채점 기준]

(1) 함수의 미분을 통해 단조증가함수임을 설명하여 역함수가 존재함을 보이는 과정이 필요합니다.

(2) 역함수를 적분한 값은 그래프와 y축 사이의 넓이임을 이용합니다. 직접계산을 하거나, 부등식을 사용하는 경우 과정이 명확하여야 합니다.

[채점 소감] (1)번의 경우 대부분의 학생들이 문제를 잘 해결하였습니다. 다항함수의 역함수의 존재를 확인하는 것은 대부분 잘 알고 있었습니다.

(2)번의 경우 다수의 학생들이 그림을 이용하여 문제를 간단히하여 쉽게 해결하였으나, 식을 변형하려고 하는 경우에는 계산의 오류로 결과를 얻지 못하는 경우가 있었습니다. 계산을 통해 문제를 해결하는 것도 좋은 방법이지만, 좀 더 쉽고 실수가 적은 문제 풀이 방법을 선택하는 것도 중요하다고 생각합니다.

$\boxed{\text{2013년 정시 13번}}$ 행렬 $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ 이 나타내는 일차변환에 의해 직선 $y = 2x + \sqrt{5}$ 가 직선 $y = -3x - 2\sqrt{10}$ 으로 이동한다. 이 때 a 와 b 를 구하시오.

[풀이] 행렬 A 에 의해 변환되는 새로운 좌표를 x', y' 이라고 하면

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - by \\ bx + ay \end{pmatrix}$$

이다.
위 변환에 의해 직선 $y = 2x + \sqrt{5}$ 가 $y' = -3x' - 2\sqrt{10}$ 으로 이동한다고 하였으므로,
직선 $bx + ay = -3(ax - by) - 2\sqrt{10}$ 은 처음 직선과 동일한 직선을 나타내야 한다.

$$bx + ay = -3(ax - by) - 2\sqrt{10} \quad \Rightarrow (a - 3b)y = -(3a + b)x - 2\sqrt{10}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{3a + b}{a - 3b}\,x - \frac{2\sqrt{10}}{a - 3b}$$

따라서 $-\dfrac{3a + b}{a - 3b} = 2,\ -\dfrac{2\sqrt{10}}{a - 3b} = \sqrt{5}$ 이고, 이 사실로부터 $a = \sqrt{2}, \quad b = \sqrt{2}$ 를 얻을 수 있다.

[채점 기준] 기본적인 일차변환에 대한 문제이므로 부분 점수 없이 채점하였습니다.

[채점 소감] 이번 문제는 기초적인 계산을 요구하는 문제였습니다. 문제에서 주어진 조건들을 적용하면 바로 풀리는 문제이나 이 방법 외에 문제의 행렬이 닮은 변환과 회전변환의 합성이라는 사실을 이용해 기하학적으로 풀이한 답안도 있었습니다. 수시 채점 때와 마찬가지로 학생들의 참신한 답변이 놀라웠고 유익한 시간이었습니다.

$\boxed{\text{2013년 정시 14번}}$ $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$ 인 증가 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여, 새로운 수열 $\{b_n\}$ 을 다음과 같이 정의하자.

$$b_n = \frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{a_{n+1} - a_n} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

수열 $\{a_n\}$ 과 $\{b_n\}$ 이 등식 $\dfrac{a_n}{a_{n+2}} b_n = b_{n+1}$ 을 만족하면, 모든 n 에 대하여 $a_{n+1} = 4 - \dfrac{2}{a_n}$ 임을 보이시오.

[풀이] $b_1 = \dfrac{a_3 - a_2}{a_2 - a_1} = \dfrac{3-2}{2-1} = 1$

문제의 조건

$$\frac{a_n}{a_{n+2}} b_n = b_{n+1} \;\Leftrightarrow\; \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_n}{a_{n+2}}$$

을 이용하면,

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} \cdot \frac{b_n}{b_{n-1}} \cdots \frac{b_3}{b_2} \cdot \frac{b_2}{b_1} = \frac{a_n}{a_{n+2}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n+1}} \cdots \frac{a_2}{a_4} \cdot \frac{a_1}{a_3}$$

$$\Rightarrow \frac{b_{n+1}}{b_1} = \frac{a_2\, a_1}{a_{n+2}\, a_{n+1}} \quad \Rightarrow\; b_{n+1} = \frac{2}{a_{n+2}\, a_{n+1}} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

$$\Rightarrow\; b_n = \frac{2}{a_{n+1}\, a_n} \; (n = 2, 3, \cdots)$$

$b_1 = 1 = \dfrac{2}{a_2\, a_1} = \dfrac{2}{2 \cdot 1}$ 이므로 $n = 1$ 일 때도 위 식이 성립한다.

따라서 모든 자연수 n 에 대하여 $b_n = \dfrac{2}{a_{n+1}\, a_n}$ 이다.

이 식을 문제의 조건 $b_n = \dfrac{a_{n+2} - a_{n+1}}{a_{n+1} - a_n}$ 에 대입하여 정리하면,

$a_{n+2} - a_{n+1} = 2 \cdot \dfrac{a_{n+1} - a_n}{a_{n+1}\, a_n} = \dfrac{2}{a_n} - \dfrac{2}{a_{n+1}}$ 을 얻는다.

$$a_3 - a_2 = \frac{2}{a_1} - \frac{2}{a_2},$$

$$a_4 - a_3 = \frac{2}{a_2} - \frac{2}{a_3},$$

$$\vdots$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2}{a_{n-1}} - \frac{2}{a_n}$$

위 식을 모두 더하면

$$a_{n+1} - a_2 = \frac{2}{a_1} - \frac{2}{a_n} \quad \Rightarrow a_{n+1} = 4 - \frac{2}{a_n} \quad (n = 2, 3, \cdots)$$

$a_2 = 2 = 4 - \dfrac{2}{a_1} = 4 - \dfrac{2}{1}$ 이므로 위 식은 $n = 1$ 일 때도 성립한다. 즉, 모든 자연수 n 에 대해서 성립한다.

[다른 풀이] $b_n = \dfrac{a_{n+2} - a_{n+1}}{a_{n+1} - a_n} \quad \Rightarrow \; a_{n+1}b_n - a_n b_n = a_{n+2} - a_{n+1}$
$\Rightarrow \; a_{n+1}b_n - a_{n+2}b_{n+1} = a_{n+2} - a_{n+1}$
$(\because b_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_{n+2}} b_n \;\Rightarrow\; b_n a_n = b_{n+1}a_{n+2})$
$\Rightarrow \; a_{n+1}b_n + a_{n+1} = a_{n+2}b_{n+1} + a_{n+2} \quad \Rightarrow \; a_{n+1}(b_n + 1) = a_{n+2}(b_{n+1} + 1)$
따라서 $\{a_{n+1}(b_n + 1)\}$ 은 상수수열이고 그 값은 $a_2(b_1 + 1) = 4$ 이다. 즉, 모든 자연수 n에 대해 $a_{n+1}(b_n + 1) = 4$ 가 성립한다.
이전 풀이와 똑같은 방법으로 $b_n = \dfrac{2}{a_{n+1}\, a_n} \quad (n = 1, 2, \cdots)$ 을 얻고 이를 위 식에 대입하면,

$$a_{n+1}\left(\frac{2}{a_{n+1}a_n} + 1\right) = 4 \quad \Rightarrow \; \frac{2}{a_n} + a_{n+1} = 4 \quad \Rightarrow \; a_{n+1} = 4 - \frac{2}{a_n}$$

을 얻는다.

[채점 기준] 수학적 귀납법으로 문제를 푼 경우 모든 풀이 과정을 정확히 적어야 점수를 받을 수 있습니다. 몇 개의 식을 구한 다음에 별다른 논리 없이 "이 식을 연립하면 $a_{n+2} = 4 - \dfrac{2}{a_{n+1}}$ 을 얻을 수 있다." 와 같은 식으로 끝을 낸 경우 0점입니다.

[채점 소감] 점화식을 쓸 때는 그 식이 성립하는 n 의 범위를 정확히 해야 합니다. b_{n+1} 에 관한 식을 b_n 에 관한 식으로 바꾸면 그 식이 성립하는 n 의 범위가 달라집니다. 이 경우 모든 자연수 n 에 대해서 성립함을 보이려면 앞의 몇 개 항에 대한 것($n = 1$ 일 때 성립하는지)도 반드시 확인해야 합니다. 많은 학생들이 이런 방법을 썼는데, n 의 범위에 대해 정확히 언급한 학생은 거의 없어서 아쉬웠습니다.

$\boxed{\text{2013년 정시 15번}}$ 실수 전체에서 정의된 n 번 미분 가능한 함수 $f(x)$ 에 대하여, n계 도함수 $f^{(n)}(x)$ 가 구간 $[0, 1]$ 에서 항상 양수이면, 방정식

$$1 + x + \cdots + x^{n-1} + f(x) = 0$$

은 구간 $[0, 1]$ 에서 n 개 이하의 서로 다른 근을 가짐을 보이시오.

[풀이] 함수 $g(x) = 1 + x + \cdots + x^{n+1} + f(x)$ 가 구간 $[0, 1]$ 에서 $n + 1$ 개의 서로 다른 근 $x_1, \cdots, x_{n+1}$ 을 갖는다고 하자. $(0 \le x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+1} \le 1)$.
그러면 함수 $g(x)$ 역시 실수 전체에서 정의된 n 번 미분 가능한 함수이므로, 각각의 $k = 1, \cdots, n$ 에 대하여 롤의 정리를 적용하면 각각의 x_k 와x_{k+1} 사이에 $g'(x) = 0$ 이 되는 x 가 적어도 하나 존재함을 알 수 있다. 따라서 $g'(x)$ 는 구간 $[0, 1]$ 에서 적어도 n 개 이상의 서로 다른 근을 갖는다. 마찬가지 방법으로 구간 $[0, 1]$ 에서 $g''(x) = 0$ 을 만족시키는 x 는 적어도 $n - 1$ 개 이상 존재하고, 같은 방법으로 $g^{(n)}(x) = 0$ 을 만족하는 x 는 적어도 1개 이상 존재해야 한다.
그런데 $g^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) > 0$ 이므로 $g^{(n)}(x)$ 는 구간 $[0, 1]$ 에서 근을 갖지 않으므로 모순이다.

따라서 $g(x) = 1 + x + \cdots + x^{n+1} + f(x)$ 는 구간 $[0, 1]$ 에서 n 개 이하의 서로 다른 근을 갖는다.

[채점 소감] 이 문제는 고교 과정에서 접하게 되는 내용 중에서 평균값 정리(또는 롤의 정리)를 사용하거나 혹은 도함수의 부호가 나타내는 의미를 이용하여 해결할 수 있는 문제였습니다. 대체로 학생들이 자신이 가진 아이디어를 수학적인 논리로 표현을 하는 것에 어려움을 느껴 증명을 제대로 해내지 못했다는 인상을 받았습니다. 그래서 증명을 완벽하게 쓰지 않고 다소 일반적이지 않는 그래프를 이용하였더라도 문제에서 의도한 바를 이해하고 설명하려 노력했다면 점수를 부여했습니다.

증명을 하기 위해서는 이유를 명시해야 하는데 정확한 설명없이 그럴것이다라고 추측하여 풀이를 적는 경우도 있었고, 그러한 과정에서 설명이 부족한 부분이나 잘못된 부분이 더러 발견되었습니다. 예를 들어 많은 학생들이 증명을 하는 데에 있어 평균값 정리, 또는 롤의 정리를 정확하게 언급하지 못했고, 그래프로 설명한 많은 학생들이 미분해서 0이 되는 점이 무조건 극대, 극소가 되는 것처럼 표현하는 오류를 범했습니다.

증명 문제이니 만큼 그래프의 모양 등을 통한 추측이 아닌 정확한 논리를 통해 답을 찾아가는 과정이 필요한 문제입니다. 학생들이 자신의 생각을 엄밀하게 논리적인 글로서 표현하기 위한 노력이 필요할 것 같습니다. 또한 롤의 정리가 아닌, 평균값 정리를 이용한 풀이도 학생들이 한번 생각해 볼 만한 문제라고 생각됩니다.

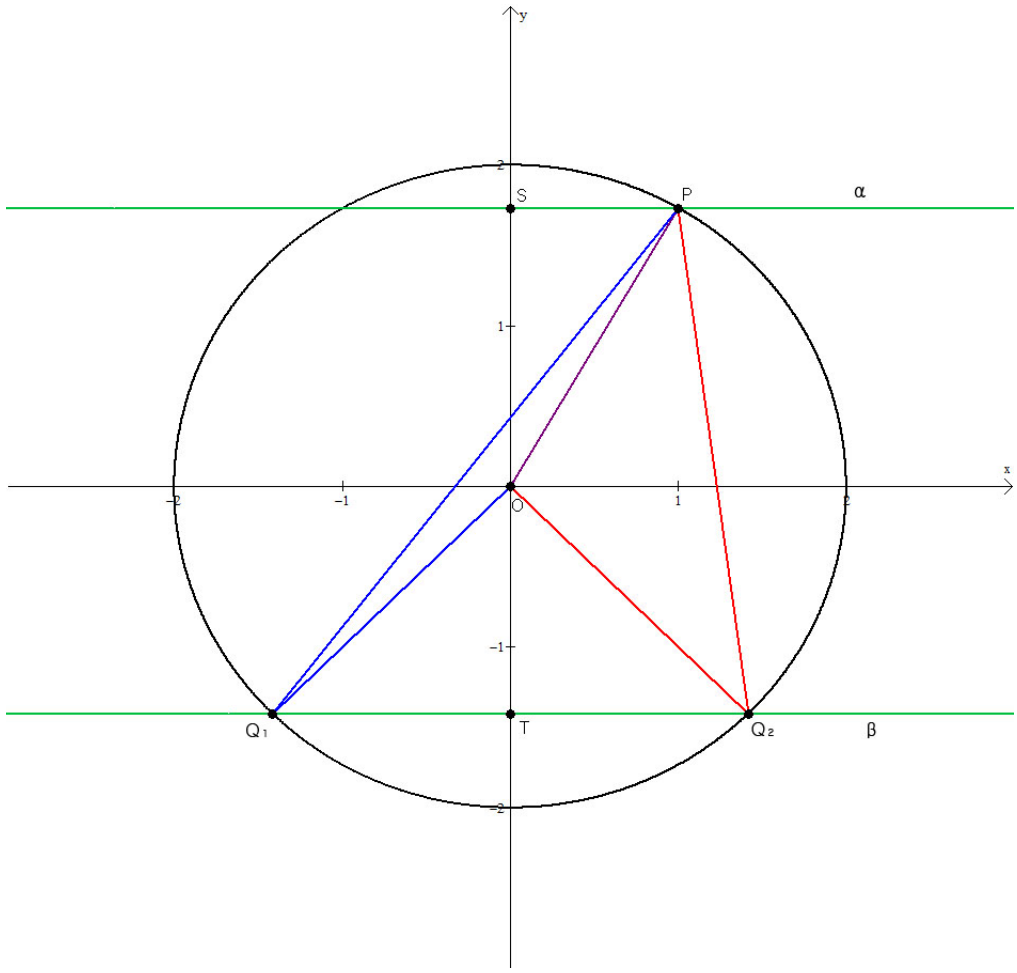
$\boxed{\text{2013년 정시 16번}}$ 좌표공간에 구면 $S:\ x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 와 두 평면

$$\alpha:\ x + y + z = 3, \qquad \beta:\ x + y + z = -\sqrt{6}$$

이 주어져 있다. 원점 $O = (0, 0, 0)$ 와 두 동점 $P \in S \cap \alpha$, $Q \in S \cap \beta$ 에 대하여 삼각형 $\triangle OPQ$ 의 넓이의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

[풀이] 점과 직전사이의 거리를 이용하면 원점과 평면 α, β 의 거리는 각각 $\sqrt{3}, \sqrt{2}$ 이다. 따라서 $S \cap \alpha$ 는 중심이 $S = (1, 1, 1)$ 이고 반지름이 1 인 원이고, $S \cap \beta$ 는 중심이 $T = -\dfrac{\sqrt{6}}{3}(1, 1, 1)$ 이고 반지름이 $\sqrt{2}$ 인 원이다.

일반성을 잃지 않고, $S \cap \alpha$ 위의 임의의 점P 를 고정한 채, $S \cap \beta$ 위의 점 Q 가 움직인다고 가정할 수 있다. 삼각형의 넓이 $= \dfrac{1}{2} \times 2^2 \times \sin(\angle POQ)$ 이므로 $\angle POQ$ 의 범위만 구하면 충분하다.



각 $\angle POQ$ 는 점 P, O, Q 를 지나는 평면이 평면 α, β 와 수직일 때 최대, 최소이고, ($Q = Q_1$ 또는 Q_2) 삼각비를 이용하면 $\angle POS = \dfrac{\pi}{6}$, $\angle Q_2OT = \dfrac{\pi}{4}$ 임을 알 수 있다.
따라서 $\dfrac{7\pi}{12} \le \angle POQ \le \dfrac{11\pi}{12}$ 이고, $\triangle POQ$ 의 넓이의 최댓값은 $2\sin\dfrac{7\pi}{12}$, 최솟값은 $2\sin\dfrac{11\pi}{12}$ 이다.

[채점 기준] 원점과 평면 사이의 거리를 둘다 구하거나 각 $\angle POS$, $\angle QOT$를 구하면 5점.
최댓값, 최솟값을 제대로 구하면 각각 3점.

[채점 소감] 대부분의 학생들이 삼차원 공간에서의 거리에 대한 이해가 높았습니다. 다만, 원점과 평면 α, β 사이의 거리는 잘 구하였으나 $\sin(\angle POQ)$ 의 최댓값이 1 (즉, $\angle POQ = \dfrac{\pi}{2}$) 이라고 이해한 학생이 상당히 많았습니다.