2013학년도 수학성취도 측정시험 (정시) 문제지

(2013년 2월 18일 시행, 고사시간 90분)

- 1번부터 11번까지는 단답형이고, 12번부터 16번까지는 서술형입니다.
- 답안지는 단정한 글씨로 작성하되, 단답형은 답만 쓰고, 서술형은 풀이과정과 답을 명시하시오.

〈 연습용 여백 〉

A. 기본문제(각3점씩, 총 18점)

A-1. 벡터 $\vec{a} = (1, 0, -1)$, $\vec{b} = (3, 4, -5)$ 가 이루는 각의 크기를 θ 라고 할 때, $\cos\theta =$ $\boxed{}$ 이다.

A-2. $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) =$ $\boxed{}$.

A-3. 함수 $f(x) = x^3 - ax^2 + 4x + 7$ 가 $(-\infty, \infty)$ 에서 증가함수이기 위한 a 값의 범위는 $\boxed{}$ 이다.

A-4. $\int_0^1 xe^{x^2}\,dx =$ $\boxed{}$.

A-5. 행렬 $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}$ 이 나타내는 일차변환 f 에 대하여, $f(P) = P$ 를 만족하는 점 P 의 자취의 방정식은 $\boxed{}$ 이다.

A-6. 좌표평면 위를 운동하는 점 $P(x, y)$ 의 시각 t 에서의 위치가

$$x = 2t, \qquad y = 4t^2 - t$$

라 하면, $t = 1$ 일 때 점 P 의 속력은 $\boxed{}$ 이다.

B. 발전문제(각7점씩, 총 49점)

B-7. 항상 양의 값을 갖는 미분가능한 함수 f 가 모든 실수 x, y 에 대하여 $f(x+y) = 4f(x)f(y)$ 을 만족하고 $f'(0) = 3$ 이면,

$$\frac{f'(2013)}{f(2013)} = \boxed{}$$

이다.

B-8. 점 $(0, 1)$ 에서 곡선 $y = \ln x$ 에 그은 접선과 이 곡선 및 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 $\boxed{}$ 이다.

B-9. 행렬 $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ 에 대하여 $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ 이면,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + b_n + c_n + d_n}{10^n} = \boxed{}$$

이다.

B-10. 실수 $x \geq 1$ 에 대하여, 부등식

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 \leq x < 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2$$

을 만족하는 자연수 n 을 $f(x)$ 라 하면, $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\sqrt[3]{x}} =$ $\boxed{}$ 이다.

B-11. 좌표평면에서 다음 매개변수 방정식으로 주어진 곡선과 x 축 및 $x = \frac{\pi}{2}$ 로 둘러싸인 영역의 넓이는 $\boxed{}$ 이다.

$$x = t\sin t, \quad y = \sin t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

★ 12번부터 16번까지는 서술형입니다. ★

B-12. 함수 $f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 3x$ 에 대하여

(a) f 의 역함수가 존재함을 보이시오.

(b) 다음 부등식이 성립함을 보이시오.

$$\int_0^2 f(x)dx + \int_0^{10} f^{-1}(x)dx < 40$$

B-13. 행렬 $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ 이 나타내는 일차변환에 의해 직선 $y = 2x + \sqrt{5}$ 가 직선 $y = -3x - 2\sqrt{10}$ 으로 이동한다. 이 때 a 와 b 를 구하시오.

C. 심화문제(각11점씩, 총 33점)

C-14. $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3$ 인 증가 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여, 새로운 수열 $\{b_n\}$ 을 다음과 같이 정의하자.

$$b_n = \frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{a_{n+1} - a_n} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

수열 $\{a_n\}$ 과 $\{b_n\}$ 이 등식 $\frac{a_n}{a_{n+2}} b_n = b_{n+1}$ 을 만족하면, 모든 n 에 대하여 $a_{n+1} = 4 - \frac{2}{a_n}$ 임을 보이시오.

C-15. 실수 전체에서 정의된 n 번 미분 가능한 함수 $f(x)$ 에 대하여, n계도함수 $f^{(n)}(x)$ 가 구간 $[0, 1]$ 에서 항상 양수이면, 방정식

$$1 + x + \cdots + x^{n-1} + f(x) = 0$$

은 구간 $[0, 1]$ 에서 n 개 이하의 서로 다른 근을 가짐을 보이시오.

C-16. 좌표공간에 구면 $S:\ x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 와 두 평면

$$\alpha:\ x + y + z = 3, \qquad \beta:\ x + y + z = -\sqrt{6}$$

이 주어져 있다. 원점 $O = (0, 0, 0)$ 와 두 동점 $P \in S \cap \alpha$, $Q \in S \cap \beta$ 에 대하여 삼각형 $\triangle OPQ$ 의 넓이의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

〈 연습용 여백 〉