2013학년도 수학성취도 측정시험

(2013학년도 수시모집 및 외국인특별전형 합격자 대상)

2012년 12월 18일, 고사시간 90분

- 1번부터 11번까지는 단답형이고, 12번부터 16번까지는 서술형입니다.
- 답안지는 깨끗한 글씨로 바르게 작성하되, 단답형은 답만 쓰고, 서술형은 풀이과정과 답을 명시하시오.
- 총 배점은 100점이고, 각 문항의 배점은, 기본문제(1-6번) 각 3점, 발전문제(7-13번) 각 7점, 심화문제(14번-16번) 각 11점입니다.

$\boxed{\text{2013년 수시 1번}}$ $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^3-x^2-x-2}{x-2}=\boxed{}$.

[풀이] $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^3-x^2-x-2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+x+1)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x^2+x+1)=7$

$\boxed{\text{2013년 수시 2번}}$ 곡선 $y=x\ln x+x^2-x$ 위의 점 $(1,0)$ 에서의 접선의 기울기는 $\boxed{}$ 이다.

[풀이] $f(x)=x\ln x+x^2-x$

$\Rightarrow\ f'(x)=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}+2x-1=\ln x+2x \quad\Rightarrow\ f'(1)=2$

$\boxed{\text{2013년 수시 3번}}$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right\}=\boxed{}$.

[풀이] $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right\}=\int_0^1(1+x^2)\,dx=\left[x+\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{4}{3}$

$\boxed{\text{2013년 수시 4번}}$ 변환 $f(x,y)=(2x-3y,\ x+ay-1)$ 에 의한 세 점 $O(0,0),P(1,1),Q(-1,1)$ 의 상을 각각 A,B,C 라고 할 때, A,B,C 가 모두 같은 직선 위에 있으려면 $a=\boxed{}$ 이다.

[풀이] 세 점 A,B,C 의 좌표는 각각 $(0,-1),(-1,a),(-5,a-2)$ 이다.
세 점이 일직선 상에 있으므로 $\dfrac{a-(-1)}{-1-0}=\dfrac{(a-2)-(-1)}{-5-0}\ \Rightarrow\ a=-\dfrac{3}{2}$ 이다.

[다른 풀이] 일차변환을 이용하여 풀 수도 있다. (일차변환은 선택과목 '기하와 벡터'에 있는 내용이다.)
점 $(0,0),(1,0),(0,1)$ 을 각각 점 A,B,C 로 보내는 변환은

일차변환 $\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ a+1 & a-1 \end{pmatrix}$ 후에 y 축 방향으로 -1 만큼 평행이동 한 것이다. 삼각형의 세 점이 같은 직선 위의 세 점으로 변환되므로 일차변환의 행렬식이 0 이다. 따라서 $4a+6=0 \Rightarrow a=-\dfrac{3}{2}$ 이다.

$\boxed{\text{2013년 수시 5번}}$ 좌표공간에서 두 점 $(1,3,1)$ 과 $(2,1,3)$ 을 지나는 직선이 xz 평면과 만나는 점의 좌표는 $\boxed{}$ 이다.

[풀이] $(2,1,3)-(1,3,1)=(1,-2,2)$ 이므로, 구하는 직선의 식은
$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z-1}{2}$ 이다.
xz 평면은 y 좌표가 0 이므로 $y=0$ 을 대입하면,
$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{3}{2}=\dfrac{z-1}{2} \Rightarrow x=\dfrac{5}{2},\ z=4$
따라서 구하는 좌표는 $\left(\dfrac{5}{2},\ 0,\ 4\right)$ 이다.

[채점 소감] 답을 $\left(\dfrac{5}{2},\ 4\right)$ 라고 쓴 학생도 있었다.

$\boxed{\text{2013년 수시 6번}}$ 함수 $f(x)=4\sin x\cos x+3\sin^2 x$ 의 최댓값은 $\boxed{}$ 이다.

[풀이] $f(x)=4\sin x\cos x+3\sin^2 x=2\sin 2x+3\cdot\dfrac{1-\cos 2x}{2}$
$=2\sin 2x-\dfrac{3}{2}\cos 2x+\dfrac{3}{2}$
$=\sqrt{2^2+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2}\sin(2x+\alpha)+\dfrac{3}{2}=\dfrac{5}{2}\sin(2x+\alpha)+\dfrac{3}{2}$
(α는 $\sin\alpha=-\dfrac{3}{5},\ \cos\alpha=\dfrac{4}{5}$ 를 만족하는 값)
따라서 $f(x)$ 의 최댓값은 $\dfrac{5}{2}+\dfrac{3}{2}=4$ 이다.

$\boxed{\text{2013년 수시 7번}}$ $\displaystyle\int_0^{\pi^2}\cos\sqrt{x}\,dx=\boxed{}$.

[풀이] $\displaystyle\int_0^{\pi^2}\cos\sqrt{x}\,dx=\int_0^{\pi}\cos t\cdot 2t\,dt$ ($\sqrt{x}=t$, 즉 $x=t^2$ 로 치환적분)
$=\Big[2t\sin t\Big]_0^{\pi}-\displaystyle\int_0^{\pi}2\sin t\,dt=0-\Big[-2\cos t\Big]_0^{\pi}=-4$

$\boxed{\text{2013년 수시 8번}}$ 실수 전체에서 정의된 연속함수 $f(x)$ 가 $f(1) = 1 + \sqrt{2}$ 를 만족한다.

$$g(s) = \int_{1-s}^{1} e^t f(s+t)\,dt$$

라고 정의할 때, $\lim_{s\to 0} g'(s) = \boxed{}$ 이다.

[풀이] $g(s) = \int_{1-s}^{1} e^t f(s+t)\,dt = \int_{1}^{s+1} e^{x-s} f(x)\,dx = e^{-s}\int_{1}^{s+1} e^x f(x)\,dx$
($x = s+t$ 로 치환적분)
$g'(s) = -e^{-s}\int_{1}^{s+1} e^x f(x)\,dx + e^{-s}\cdot e^{s+1} f(s+1), \quad g'(0) = e\cdot f(1) = e(1+\sqrt{2})$
f 가 연속함수이므로 이를 정적분한 것도 연속함수이고, 연속함수의 합과 곱으로 이루어진 $g'(s)$ 도 연속함수이다. 따라서 $\lim_{s\to 0} g'(s) = g'(0) = (1+\sqrt{2})e$ 이다.

[채점 소감] 문제 난이도에 비해 많은 학생들이 잘 풀었다. 오답으로 $-(1+\sqrt{2})e,\ 2(1+\sqrt{2})e$ 인 학생들이 많았는데, 풀이 접근 방법은 맞았으나 계산 중에 실수를 한 것으로 보인다.

$\boxed{\text{2013년 수시 9번}}$ 등식 $\ln(y-x) = \ln y - \ln x$ 를 만족시키는 x 와 y 에 대하여, y 의 값이 최소가 되게 하는 x 의 값은 $\boxed{}$ 이고, 그 때 y 의 값은 $\boxed{}$ 이다.

[풀이] $\ln(y-x) = \ln y - \ln x = \ln\dfrac{y}{x}$.
log 함수는 일대일함수이므로 $y - x = \dfrac{y}{x} \ \Rightarrow\ y = \dfrac{x^2}{x-1}$
$y = \dfrac{x^2}{x-1}$ $(x > 0)$ 의 그래프를 살펴보면 된다.
$y' = \dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$ 이므로 $0 < x < 2$ 에서는 감소, $x > 2$ 에서는 증가한다.
따라서 $x = 2$ 일 때 최솟값 $y = 4$ 를 갖는다.

$\boxed{\text{2013년 수시 10번}}$ 제일사분면에서 타원 $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 과 접하는 직선과 x 축, 그리고 y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이의 최솟값은 $\boxed{}$ 이다.

[풀이] 타원 위의 점 (a,b) 에서의 접선의 방정식은 $\dfrac{1}{4}ax + by = 1$ 이다.
(제일사분면 위의 점이므로 a, b 는 모두 양수)
이 직선의 x 절편은 $\dfrac{4}{a}$ 이고, y 절편은 $\dfrac{1}{b}$ 이다.
따라서 구하는 삼각형의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4}{a}\cdot\dfrac{1}{b} = \dfrac{2}{ab}$ 이다.
(a,b) 가 타원 위의 점이므로 $\dfrac{a^2}{4} + b^2 = 1$ 이고, 산술기하평균부등식에 의해 $1 = \dfrac{a^2}{4} + b^2 \geq 2\cdot\sqrt{\dfrac{a^2}{4}\cdot b^2} = ab$ 를 만족한다. 따라서 삼각형의 넓이의 최솟값은 2 이다.

$\boxed{\text{2013년 수시 11번}}$ 연속함수 f 가 다음 조건을 만족한다.

(1) $f(0) = 0$ 이고,

(2) 임의의 정수 n 에 대하여 열린구간 $(n,\ n+1)$ 에서 $f'(x) = n^2$.

이 때, $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^3} = \boxed{}$ 이다.

[풀이] 문제의 조건으로부터 $f(n+1) - f(n) = n^2$ 을 얻을 수 있다. (n 은 자연수)

$\Rightarrow\ f(n+1) = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \quad \Rightarrow \quad f(n) = \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)$

$f(x)$는 연속함수이고, 정수를 제외한 점에서 $f'(x) \geq 0$ 이므로 구간 $(0, \infty)$ 에서 증가함수이다.

$x \in [n, n+1)$ 이라 하자.

$$\frac{f(n)}{(n+1)^3} < \frac{f(n)}{x^3} \leq \frac{f(x)}{x^3} < \frac{f(n+1)}{x^3} \leq \frac{f(n+1)}{n^3}$$

이고, $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{(n+1)^3} = \frac{1}{3}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n+1)}{n^3} = \frac{1}{3}$ 이므로, $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^3} = \frac{1}{3}$ 이다.

[채점 소감] 오답으로 $\frac{1}{6}$ 을 적은 학생도 몇 명 있었지만, 대부분의 학생들이 잘 풀었다.

$\boxed{\text{2013년 수시 12번}}$ 양수 a, b, c, d 가 다음 부등식을 모두 만족한다.

$$|a-c| < \frac{1}{2(b+1)}, \qquad |b-d| < \frac{1}{2(c+2)}$$

이 때 부등식 $|ab - cd| < 1$ 이 성립함을 보이시오.

[풀이] b 는 양수이므로 첫 번째 부등식의 양변에 b 를 곱하면,

$$b\,|a-c| < \frac{b}{2\,(b+1)} < \frac{1}{2} \quad \text{이므로}$$

$$-\frac{1}{2} < b\,(a-c) < \frac{1}{2} \quad \text{이다.} \tag{1}$$

마찬가지 방법으로 두 번째 부등식의 양변에 c 를 곱하면,

$$-\frac{1}{2} < c\,(b-d) < \frac{1}{2} \quad \text{이다.} \tag{2}$$

이제 식 (1) 과 (2) 를 더하면

$$-1 < ab - cd < 1.$$

따라서 $|ab - cd| < 1$ 이다.

[채점 기준] 주어진 식에 b 와 c 를 곱하여 상한을 조절하려 한 경우에만 부분점수를 주었다.

[채점 소감] 부등식에서 양수를 곱하여도 부등호 방향은 그대로임을 알지만, 각 상한을 $\frac{1}{2}$ 보다 큰 수로 구해 잘못된 결론을 낸 학생들이 의외로 많았다.

$\boxed{\text{2013년 수시 13번}}$ n 차 다항식 $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ 이 $x = a$ 에서 극값 3 을 갖는다. 행렬 $A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & a \end{pmatrix}$ 에 대하여, 다음 식으로 주어진 행렬의 모든 성분의 합을 구하시오. (단, E 는 2×2 단위행렬이다.)

$$a_n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots a_0 E$$

[풀이] 다항식 $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ 가 $x = a$ 에서 극값 3 을 가지므로

$$p'(a) = \sum_{k=1}^{n} k\, a_k a^{k-1} = 0, \quad p(a) = \sum_{k=0}^{n} a_k a^k = 3$$

이다. 그리고

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2ac \\ 0 & a^2 \end{pmatrix},\ A^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2c \\ 0 & a^3 \end{pmatrix},\ \cdots \ \Rightarrow\ A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}c \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$$

이므로

$$(*) \quad a_n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_0 E = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k a^k & c\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k a_k a^{k-1} \\ 0 & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k a^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

따라서 행렬 $(*)$ 의 모든 성분의 합은 6 이다.

[다른 풀이] $p'(a) = 0$ 이므로 $p(x) = (x-a)^2 q(x) + 3$ 꼴로 표현된다. 그런데 $(A - aE)^2 = 0$ 이므로 $p(A) = 3E$, 따라서 답은 6 이다.

[채점 기준] $p(a) = 3,\ p'(a) = 0$ 을 명확히 언급하면 2점, 일반적인 A^n 을 구하면 2점
행렬 $(*)$ 를 구하면 2점, 답까지 정확히 구하면 1점

[채점 소감] 대부분 학생들이 잘 풀었다. 그런데 행렬 $(*)$ 의 1행 2열 성분을 잘못 구한 학생들이 몇명 있었다.

$\boxed{\text{2013년 수시 14번}}$ 좌표공간에서 직선 $x = y = z$ 를 회전축으로 하여 점 $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, 0, 0\right)$ 을 $\frac{\pi}{3}$ 만큼 회전시킨 점의 좌표를 구하시오. (단, 회전의 방향은 점 $(1,1,1)$ 에서 원점을 바라보았을 때 반시계방향으로 한다.)

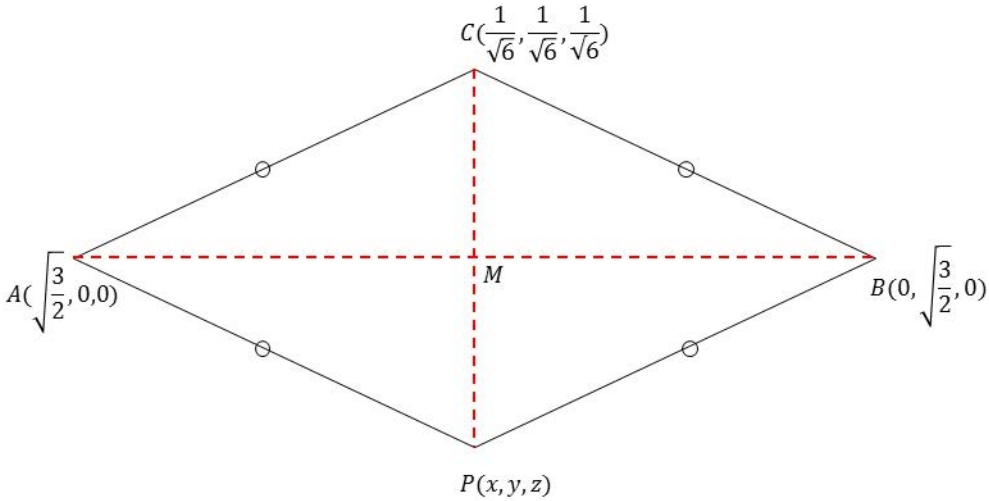
[풀이] $A = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, 0, 0\right),\ B = \left(0, \sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right)$ 라 하자.
또, 점 A 에서 직선 $x = y = z$ 로 내린 수선의 발을 C 라고 하자.

간단한 계산을 통해 $C = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ 임을 알 수 있다.
마지막으로 우리가 구하고자하는 점을 $P = (x, y, z)$ 라고 두자.

점 A 를 $\frac{2\pi}{3}$ 만큼 회전시킨 점이 B 이므로 $\overline{AC} = \overline{BC} = \overline{PC}$ 임을 알 수 있다. ($\because$ 회전변환은 길이를 보존한다.)
그리고 삼각형 ACP 는 정삼각형이므로, $\overline{AC} = \overline{AP}$.
즉, 사각형 $APBC$ 는 마름모이다.
따라서,

$$\overline{AB}\text{의 중점} = \overline{PC}\text{의 중점}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right) &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) + (x, y, z)\right] \\ \therefore (x, y, z) &= \left(\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right) \end{aligned}$$



[다른 풀이] 다음과 같은 정규 직교 벡터 3개를 고려하자.

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1), \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, -1), \quad v_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$$

v_3 는 직선 $x = y = z$ 와 나란함을 알 수 있다.
또 회전하고자 하는 점을 v_1, v_2, v_3 를 이용해 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, 0, 0\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}v_3$$

이제 우리가 원하는 직선 $x = y = z$ 에 관한 회전이동을 함수 F 라 놓자.
그러면

$$\begin{aligned} F\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, 0, 0\right) &= F\left(\frac{\sqrt{3}}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}v_3\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}F(v_1) - \frac{1}{2}F(v_2) + \frac{1}{\sqrt{2}}F(v_3) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}v_1 + \sin\frac{\pi}{3}v_2\right) - \frac{1}{2}\left(-\sin\frac{\pi}{3}v_1 + \cos\frac{\pi}{3}v_2\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}v_3 \\ &= \sqrt{6}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{6}\right) \end{aligned}$$

[채점 기준]

- 어떤 풀이로 풀던지, 과정에 논리적 비약이나 오류가 없을 경우 만점처리
- 답이 맞았으나, 문제의 설명이 지나치게 적은 경우 6점
- 회전의 향을 반대로하여 답이 틀린 경우 9점
- 답이 틀린 경우 0점

[채점 소감]

1. 공간에서의 회전을 다룬 문제라 어렵게 생각되었는지, 문제를 아예 풀지 못한 학생들도 꽤 있었다. 푼 학생들 중에 반 정도는 구하고자 하는 점의 좌표를 변수 세 개로 셋팅한 다음, 이 변수들에 대한 세가지 식을 유도하였다. 그런데 그대로 세 연립방정식을 푸는 것은 (극소수의 계산에 매우 능한 학생들만을 제외하고는) 시험시간을 감안하면 상당히 어렵다.

2. 대부분의 정답자들은 공간 좌표를 그려 문제의 조건들을 표현해보면서 기하학적인 성질을 다양하게 이용했다. 그런데 직관적으로는 상황을 파악하였으나 그림과 관련된 설명을 제대로 하지 못한 학생들도 종종 있었다. 대칭성, 도형의 성질 등을 이용하기 위해서 필요한 조건과 성질들을 표현하는 데 학생들이 좀 더 신경을 써야할 필요가 있다고 본다.

$\boxed{\text{2013년 수시 15번}}$ 부등식 $e + (x-2)e^{\frac{1}{x}} \geq (x-1)e^{\frac{2}{x}}$ 가 2 이상인 모든 실수 x 에 대하여 항상 성립함을 보이시오.

[풀이] $x = 2$ 인 경우는 당연히 위의 부등식이 성립하므로 $x > 2$ 인 경우만 생각하면 충분하다. $x > 2$ 라 하고, $f(t) = e^t$ 라는 실수 위의 함수를 생각하자. 그러면 f 는 모든 실수에서 미분가

능하므로, 평균값 정리에 의해

$$f'(c_1) = \frac{f(\frac{2}{x}) - f(\frac{1}{x})}{\frac{2}{x} - \frac{1}{x}} = \left(e^{\frac{2}{x}} - e^{\frac{1}{x}}\right)x, \quad f'(c_2) = \frac{f(1) - f(\frac{2}{x})}{1 - \frac{2}{x}} = \frac{\left(e - e^{\frac{2}{x}}\right)x}{x-2}$$

를 만족하는 $\dfrac{1}{x} < c_1 < \dfrac{2}{x}$, $\dfrac{2}{x} < c_2 < 1$ 이 존재한다.
그런데 $f'(t) = e^t$ 이므로 f' 은 증가함수이다. 따라서

$$\begin{aligned} x\left(e^{\frac{2}{x}} - e^{\frac{1}{x}}\right) = f'(c_1) &\leq f'(c_2) = \frac{\left(e - e^{\frac{2}{x}}\right)x}{x-2} \\ \Leftrightarrow \quad (x-2)\left(e^{\frac{2}{x}} - e^{\frac{1}{x}}\right) &\leq e - e^{\frac{2}{x}} \\ \therefore \quad e + (x-2)e^{\frac{1}{x}} &\geq (x-1)e^{\frac{2}{x}}. \end{aligned}$$

[채점 소감] 대부분의 학생들이 $f(x) = e + (x-2)e^{\frac{1}{x}} - (x-1)e^{\frac{2}{x}}$ 라는 함수를 두고, $x \geq 2$ 에서 $f'(x) \geq 0$ 이고, $f(2) = 0$ 임을 이용하여 문제를 해결하려고 노력했다. 하지만 $f'(x) \geq 0$ 을 보이는 것이 매우 복잡해서 이러한 접근을 선택했던 대부분의 학생들은 논리적으로 완벽한 증명을 해내지 못했다.

$\boxed{\text{2013년 수시 16번}}$ 좌표공간에서 다음 부등식으로 주어진 입체의 부피를 구하시오.

$$x^2 - 2 \leq y \leq 2, \quad 0 \leq z \leq 6 - x^2 - y$$

[풀이] 먼저 $x^2 - 2 \leq y \leq 2$ 에서 $x^2 \leq 4$ 를 얻을 수 있다.
주어진 입체 R 을 x 축에 수직인 평면으로 잘랐을 때, 단면의 넓이 $A(x)$ 는 다음과 같다. $(-2 \leq x \leq 2)$

$$\begin{aligned} A(x) &= \int_{x^2-2}^{2} (6 - x^2 - y)\,dy = \left[(6-x^2)y - \frac{1}{2}y^2\right]_{x^2-2}^{2} \\ &= \frac{3}{2}(x^4 - 8x^2 + 16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore\ \mathrm{vol}(R) &= \int_{-2}^{2} A(x)\,dx = \frac{3}{2}\int_{-2}^{2} (x^4 - 8x^2 + 16)\,dx \\ &= 3\int_{0}^{2} (x^4 - 8x^2 + 16)\,dx = 3\left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{8}{3}x^3 + 16x\right]_0^2 \\ &= \frac{256}{5} \end{aligned}$$

[**채점 기준**]

- 주어진 입체를 자른 단면을 식으로 잘 표현하면 5점
- 단면적을 나타내는 함수를 적분하여 부피를 정확히 계산하면 11점

(x 축과 수직인 평면으로 자른 단면을 계산하지 않고, y 축 혹은 z 축으로 자른 단면을 계산한 답안도 같은 채점기준 적용)

[**채점 소감**] 입체의 부피를 단면적을 적분하여 계산한다는 기본 개념을 숙지하고 있는 학생은 많았으나, 이를 정확히 계산해 내는 능력의 부족함이 아쉬웠던 답안이 많았다. 특히 이 문제의 경우, x 축과 수직인 평면으로 자른 단면적을 구해서 적분하여 부피를 구하는 것이 가장 계산이 쉽다. 하지만 y 축 혹은 z 축으로 자른 단면적을 적분해서 부피를 구하고자 하는 시도를 한 답안이 많이 보였고, 이 경우 x 축으로 자른 단면적을 구하는 것보다 계산이 훨씬 복잡하기 때문에, 성공적으로 마무리한 학생이 드물었다. 자신이 시도한 계산이 너무 어려울 경우 다른 쉬운 방법을 찾아 보는 습관을 기를 필요가 있겠다.