선형대수학; TA 업무 배정 평가 (2007. 8. 10.)

1. (6점) $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$이 주어졌을 때 linear map $T : M_{2,2}(\mathbb{R}) \to M_{2,2}(\mathbb{R})$을

$$T(B) = AB, \qquad B \in M_{2,2}(\mathbb{R})$$

로 정의하자. $M_{2,2}(\mathbb{R})$의 standard basis $\{E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}\}$에 관한 linear map T의 matrix representation을 구하라.

2. (6점) $A \in M_{m,n}(F)$, $B \in M_{n,m}(F)$이고, $AB = I_m$, $BA = I_n$이면, $n = m$임을 보여라.

3. (6점) $\{A_1, \ldots, A_n\} \subset \mathbb{R}^n$이 일차종속이면, $\det(A_1, \ldots, A_n) = 0$임을 보여라.

4. (6점) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$일 때, $B^3 = A$인 $B \in M_{2,2}(\mathbb{R})$을 (하나만) 구하라.

5. (6점) $T : V \to V$가 linear map이고 $f(t) \in F[t]$일 때, λ가 T의 eigen-value이면, $f(\lambda)$는 $f(T)$의 eigen-value임을 보여라.

6. (6점) $S, T : V \to V$가 linear map이고 $S \circ T = T \circ S$이면, $\ker S$와 $\mathrm{im} S$는 T-stable임을 보여라.

7. (가) (10점) $A \in M_{n,n}(F)$가 diagonalizable이기 위한 필요충분조건은 minimal polynomial $m_A(t)$가 multiplicity 1인 $F[t]$의 일차식들로 인수분해되는 것임을 보여라.
(나) (6점) $B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$일 때, B가 orthogonally diagonalizable이면, B는 symmetric matrix임을 보여라.

8. $W = \big\langle (-1, 1, 0), (1, 0, -1) \big\rangle < \mathbb{R}^3$라고 할 때,
(가) (6점) W의 orthonormal basis를 구하라.
(나) (6점) 점 $(2, 3, 4)$에서 W에 내린 수선의 발을 구하라.

9. (6점) $\mathbb{R}^2$위의 rotation은 두개의 reflection의 곱으로 나타낼 수 있음을 보여라.

10. (6점) $T : V \to V$는 유한차원 vector space V위의 linear map이고 , $\{v_i\}, \{v_i^*\}$ 는 각각 basis 와 그것의 dual basis라 할 때, $\mathrm{tr}(T) = \sum v_i^*\big(T(v_i)\big)$ 임을 보여라.

11. (가) (6점) 유한차원 vector space V는 그의 double dual V^{**}와 naturally isomorphic함을 보여라.
(나) (6점) 유한차원 vector space V, W와 linear map $T : V \to W$가 주어졌을 때, 다음 diagram이 commute함을 보여라.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, equal] & W \arrow[d, equal] \\ V^{**} \arrow[r, "T^{**}"] & W^{**} \end{tikzcd}$$

12. (가) (6점) Symmetric matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$에 의해 주어지는 non-degenerate symmetric bilinear form $B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$을 생각하자. $(\mathbb{R}^2)^*$와 $\mathbb{R}^2$를 B-identify했을 때, $\mathbb{R}^2$위의 linear functional $f(x, y) = x + y$와 대응되는 $\mathbb{R}^2$의 vector를 구하라.
(나) (6점) Linear map $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$을

$$T(x_1, \cdots, x_n) = (x_n, x_1, \cdots, x_{n-1}), \qquad (x_i \in \mathbb{R})$$

로 정의하자. 이때 canonical inner product로 $(\mathbb{R}^n)^*$와 $\mathbb{R}^n$를 identify하면, dual map T^*를 $\mathbb{R}^n$상의 linear map으로 이해할 수 있다. $T^*(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$을 구하라.