

2008년 8월 TA 자격시험: 미적분학

2008년 8월 8일 10시 - 12시

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오 (총점 200점).

1. (10점) 다음 급수의 수렴여부를 판정하라.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \tan\left(\sin \frac{1}{n}\right)$$

2. (15점) 다음 멱급수가 수렴하는 x 의 범위를 구하라.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n 8^n} x^{3n}$$

3. (20점) $6 \cdot \sinh(0.1)$ 의 근사값을 오차가 10^{-4} 이하가 되도록 구하라.

4. (15점) 극좌표계에서 식 $r = 1 + |\cos \theta|$ 로 주어진 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하라.

5. (30점) 좌표평면에서 식 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ 로 주어진 곡선 S 가 있을 때,

(a) (20점) 곡선 S 의 길이를 구하라.

(b) (10점) 곡선 S 의 곡률이 최대가 되는 점에서의 곡률을 구하라.

6. (30점) 함수 $f(x, y)$ 가 다음과 같이 주어져 있을 때,

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + x\sqrt{y^4 + y^5}}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(a) (10점) $\text{grad}f(0, 0)$ 를 구하라.

(b) (20점) 원점에서 f 의 미분가능성을 조사하라.

7. (20점) 곡선 $x^2 + xy + y^2 = 3$, $y \geq 0$ 위의 점 x, y 에 대하여 함수 $f(x, y) = 2x + 2y - xy$ 의 최대값과 최소값을 구하라.

8. (20점) 벡터장

$$F(x, y, z) = (yz, xz, xy + 2)$$

를 곡선 $X(t) = (\cos t, e^t, t)$ 를 따라 점 $P := X(0)$ 에서 $Q := X(\frac{\pi}{2})$ 까지 적분한 값을 구하라.

9. (20점) 좌표공간에서 부등식

$$x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} \leq 1, \quad x^2 + y^2 + z^2 \geq 1, \quad z \geq 0$$

를 만족시키는 입체의 중심을 구하라.

10. (20점) 곡면 $S: 3x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 1$ 에 대하여 다음 적분을 구하라.

$$\iint_S \frac{6x^2z + ye^z \sin x - z^3}{\sqrt{9x^2 + 4y^2 + z^2}} dS$$