선형대수학; TA 업무 배정 평가 (2008. 8. 8.)

1. (10점) 구간 $[0, 2\pi]$ 에서 정의된 함수 $f_k(t) = e^{kit}, (k = 0, \cdots, n)$에 의해 span되는 $\mathbb{C}$위의 vector space를 V라 하자. V위의 linear functional $\varphi_k : V \to \mathbb{C}$를

$$\varphi_k(g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)e^{-ikt}dt, \qquad (k = 0, \cdots, n)$$

로 정의하면 $\{\varphi_k\}$는 basis $\{f_k\}$의 dual basis임을 보여라.

2. (10점) V가 $\mathbb{R}$위의 finite dimensional vector space이고 $T : V \to V$는 linear map이라 하자. $\det T$와 $\mathrm{tr}T$를 정의하고 well-defined됨을 설명하라.

3. linear map $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$의 minimal polynomial이 $m_T(t) = (t-1)(t^2+2t+2)$이라고 하자.
(가) (5점) 가능한 characteristic polynomial들을 모두 구하라.
(나) (5점) (가)에서 구한 각 경우에 대하여 분해정리들을 적용해서 T에 대응하는 행렬을 companion matrix들의 block diagonal matrix로 나타내라.

4. (10점) 임의의 행렬 $A \in M_{2,2}(\mathbb{C})$는 적당한 $B \in M_{2,2}(\mathbb{C})$가 존재하여 $A = B^2$으로 쓸수있음을 보여라. (힌트 : Jordan canonical form)

5. (10점) $O(2)$의 원소는 $\mathbb{R}^2$위의 rotation이나 reflection을 나타냄을 보여라.

6. (5점) Symmetric matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$에 의해 주어지는 non-degenerate symmetric bilinear form $B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$을 생각하자. $\mathbb{R}^2 \neq W \oplus W^\perp$이지만 $\dim \mathbb{R}^2 = \dim W + \dim W^\perp$를 만족하는 subspace W를 찾아라.

7. Symmetric matrix

$$\mathrm{diag}(1, 2, \cdots, n) \in M_{n,n}(\mathbb{R})$$

에 의해 주어지는 non-degenerate symmetric bilinear form $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$을 생각하자.
(가) (5점) $(\mathbb{R}^n)^*$와 $\mathbb{R}^n$를 B-identify했을 때, $\mathbb{R}^n$위의 linear functional $f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i$와 대응되는 $\mathbb{R}^n$의 vector를 구하라.
(나) (10점) linear map $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$을

$$T(x_1, \cdots, x_n) = (x_n, x_1, \cdots, x_{n-1})$$

로 정의하자. 이때 $(\mathbb{R}^n)^*$와 $\mathbb{R}^n$를 B-identify하면, dual map T^*를 $\mathbb{R}^n$상의 linear operator ${}^tT$로 이해할 수 있다. ${}^tT(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$을 구하라.

8. (10점) V가 real inner product space이고 $T : V \to V$는 linear map이라 하자. T가 projection 일 필요충분조건은 T가 symmetric (${}^tT = T$)이고 idempotent ($T^2 = T$)임을 보여라.

9. (가) (5점) 임의의 행렬 $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$는 적당한 self-adjoint matrix B, C가 존재하여 $A = B + iC$로 써짐을 보여라.
(나) (5점) 임의의 self-adjoint matrix $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$는 eigenvalue들이 모두 nonnegative인 적당한 self-adjoint matrix B, C가 존재하여 $BC = 0$이고 $A = B - C$로 써짐을 보여라.

10. (10점) $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$이고 $A^*A - AA^*$의 eigenvalue들이 모두 nonnegative라 하자. 그러면 A는 normal matrix임을 보여라. (Hint : trace)