

# 2008년 2월 TA 자격시험: 미적분학

2008년 2월 15일 10시 - 12시

학번:  이름:

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오(총점 200점).

1. (20점) 다음 급수의 수렴여부를 판정하시오.

(a)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n}{10}\right)^n$       (b)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$   
 (c)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{n}$       (d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^n - 1}$

2. (20점) 다음 멱급수가 수렴하는  $x$ 의 범위를 구하시오.

(a)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n} x^{2n}$   
 (b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

3. (20점) 함수  $F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt$ 의 원점에서의 3차 근사다항식을 구하라.

4. (20점) 극좌표계에서 다음 식으로 주어진 영역의 넓이를 구하라.

$$2 \leq r \leq 1 + 2 \cos \theta$$

5. (30점) 실수  $t$ 에 대하여 곡선  $X(t)$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$X(t) = (\sqrt{2}t, \sqrt{2}t, 1 - t^2)$$

- (a) (10점)  $t = 0$ 에서의 접선의 식을 구하라.
  - (b) (10점)  $t = 0$ 에서의 접축평면의 식을 구하라.
  - (c) (10점) 점  $(0, 0, 1)$ 에서 점  $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ 까지 곡선  $X(t)$ 의 길이를 구하라.
6. (30점) 함수  $f(x, y)$ 가 다음과 같이 주어져 있다.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y \sqrt{x^2 + y^2}}{x^4 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (a) (10점)  $f$ 가 원점에서 연속인지 판단하여라.
- (b) (10점)  $D_1 f(0, 0)$ 와  $D_2 f(0, 0)$ 가 존재하면 그 값을 구하여라.
- (c) (10점) 원점에서  $f$ 의 미분가능성을 판단하여라.

7. (20점) 벡터장

$$F(x, y, z) = (y \cos z - yze^x, x \cos z - ze^x, -xy \sin z - ye^x)$$

를 곡선  $X(t) = (\sin^3 t, 1 - \cos t, \frac{2t}{\pi})$ 를 따라 점  $P = (0, 0, 0)$ 에서  $Q = (1, 1, 1)$ 까지 적분한 값을 구하라.

8. (20점) 표준 단위공  $B \subset \mathbb{R}^3$ 와 실수  $p$ 에 대하여

$$\iiint_B \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{p/2}} < \infty$$

일 필요충분 조건은  $p < 3$ 임을 보여라.

9. (20점) 평면에서 단순폐곡선  $C$ 의 내부  $D$ 가 원점을 포함할 때 벡터장  $F(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}\right)$ 에 대하여  $\int_C F \cdot ds$ 의 값을 구하라.