선형대수학; TA 업무 배정 평가 (2008. 2.15.)

1. (10점)

$$\det : M_{3,3}(F) \to F$$

의 uniqueness를 증명하라.

2. (가) (3점) $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$이 주어졌을 때 linear map $\lambda_A, \rho_B : M_{2,2}(\mathbb{R}) \to M_{2,2}(\mathbb{R})$를 각각

$$\lambda_A(C) = AC \qquad \rho_B(C) = CB, \qquad C \in M_{2,2}(\mathbb{R})$$

로 정의하자. $M_{2,2}(\mathbb{R})$의 standard basis $\{E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}\}$에 관한 linear map λ_A, ρ_B에 대응하는 행렬들을 각각 구하라.
(나) (3점) 위에서 구한 두 4×4 matrix가 서로 commute함을 증명하라.
(다) (3점) 임의의 $A \in M_{2,2}(\mathbb{R})$에 대하여

$$\mathrm{tr}(A) = \langle A\xi, \xi \rangle$$

을 만족하는 $\xi \in \mathbb{R}^2$는 존재하지 않음을 보이라.
(라) (3점) $\Phi : M_{2,2}(\mathbb{R}) \to M_{4,4}(\mathbb{R})$를 $\Phi(A) = [\lambda_A$에 대응하는 행렬]으로 정의 할때 임의의 $A \in M_{2,2}(\mathbb{R})$에 대하여

$$\mathrm{tr}(A) = \langle \Phi(A)\xi, \xi \rangle$$

을 만족하는 $\xi \in \mathbb{R}^4$가 존재함을 보이라.

3. V가 유한차원 real inner product space이고 W는 V의 subspace라 하자.
(가) (3점) W위로의 projection P를 정의하라.
(나) (3점) $W \neq 0, V$일때 projection P의 minimal polynomial을 구하라.
(다) (3점) $\mathrm{tr}(P) = \dim W$임을 보여라.
(라) (3점) linear map $T : V \to V$에 대하여 W와 $W^\perp$가 T-invariant일 필요충분조건은

$$T \circ P = P \circ T$$

임을 보여라.

4. (10점) $A \in M_{n,n}(F)$가 diagonalizable이면 minimal polynomial $m_A(t)$가 multiplicity 1인 $F[t]$의 일차식들로 인수분해됨을 보여라.

5. linear map $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$의 minimal polynomial이 $m_T(t) = (t-1)^2(t^2+2t+2)$이라고 하자.
(가) (5점) characteristic polynomial을 구하라.
(나) (5점) 분해정리들을 적용해서 T에 대응하는 행렬을 companion matrix들의 block으로 나타내라.

6. (10점) $SO(3)$의 원소는 $\mathbb{R}^3$위의 회전운동임을 보여라.

7. (가) (5점) V가 유한차원 real inner product space일 때 기저의 선택과 무관한 linear isomorphism $\Phi : V \to V^*$를 구성하라.
(나) (3점) W가 V의 subspace일 때 $\Phi(W^\perp) = W^{\mathrm{perp}}$임을 보여라.
(다) (3점) $\{v_i\}$가 V의 orhonormal basis이면 $\{\Phi(v_i)\}$는 $\{v_i\}$의 dual basis임을 보여라.

8. Symmetric matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R})$에 의해 주어지는 non-degenerate symmetric bilinear form $B : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$을 생각하자.

(가) (5점) $(\mathbb{R}^3)^*$와 $\mathbb{R}^3$를 B-identify했을 때, $\mathbb{R}^3$위의 linear functional $f(x,y,z) = x+y+z$와 대응되는 $\mathbb{R}^3$의 vector를 구하라.
(나) (10점) linear map $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$을

$$T(x,y,z) = (z,x,y)$$

로 정의하자. 이때 $(\mathbb{R}^3)^*$와 $\mathbb{R}^3$를 B-identify하면, dual map T^*를 $\mathbb{R}^3$상의 linear operator로 이해할 수 있다. $T^*(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$를 구하라.

9. (10점) $U(n)$을 $\mathbb{C}^{n^2}$의 topological subspace로 생각하자. $U \in U(n)$일때 $p(0) = I$이고 $p(1) = U$인 continuous path

$$p : [0,1] \to U(n)$$

를 구성하라.