

# 2008년 12월 TA 자격시험: 미적분학

2008년 12월 29일 10시 - 12시

학번: \_\_\_\_\_ 이름: \_\_\_\_\_

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오.(총점 200점).

1. (20점) 다음 특이적분이 수렴함을 보이시오.(Hint: 교대급수의 수렴정리)

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

2. (30점) 다음을 보이시오.

(a) (10점)  $-1 < x < 1$ 에서  $\log(1+x)$ 를 멱급수로 나타내시오.

(b) (20점)  $\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$  임을 보이시오.

3. (20점) 다음 정적분의 값을 오차의 범위가  $10^{-3}$ 이 되도록 구하시오.

$$\int_0^{0.3} e^{-x^2} dx$$

4. (20점) 극좌표계에서 식  $r^2 = \sin \theta$ 로 표현되는 곡선의 모양을 그리시오.

5. (20점) 사이클로이드  $X(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ 를 호의 길이로 매개화하시오.

6. (20점) 곡선  $X(t) = (\cos t, \sin^2 t, \frac{1}{2} \sin 2t)$ 에서  $t = \pi$ 일 때의 곡률과 접축평면의 식을 구하시오.

7. (20점) 좌표평면에서 정의된 일급함수  $f$ 에 대하여 다음 극한값을 구하시오.

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{r} f(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta.$$

8. (20점) 극좌표계에서  $0 \leq r \leq f(\theta)$ ,  $(\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1)$ 로 주어진 영역의 넓이가 다음과 같이 주어짐을 보이시오.(Hint: 치환적분법)

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{1}{2} f(\theta)^2 d\theta$$

9. (30점)

(a) (10점)  $n$ -공간 속의 영역  $A$ 에서 연속인 함수  $f$ 가 최대값과 최소값을 가진다고 하자. 이때  $A$ 가 곡선 연결(arcwise-connected)되어 있으면 다음을 만족하는 점  $p \in A$ 가 존재함을 보이시오.

$$\frac{1}{\text{Vol}(A)} \int_A f = f(p)$$

(b) (20점) 공간 속에서 점  $p$ 를 중심으로 하고 반지름의 길이가  $r$ 인 공을  $B_r$ 이라고 하자. 이때 점  $p$ 근방에서 정의된 일급 벡터장  $F$ 에 대하여 다음을 보이시오.

$$\text{div} F(p) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\text{Vol}(B_r)} \iint_{\partial B_r} F \cdot ds$$