

2009년 2월 TA 자격시험: 미적분학

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오(총점 200점).

1. (20점) 다음 급수가 수렴하는 x 의 범위를 구하시오.

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/2)}{2^n} x^n \qquad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{6^n}$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n + (-1)^n} \qquad (d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n x^n}{n!}$$

2. (20점) 다음 물음에 답하시오.

- (a) (10점) 함수 $f(x) = 3x + \cos x$ 는 모든 실수 y 에 대하여 역함수 $g(y)$ 가 정의됨을 보이시오.
 (b) (10점) 이때 미분계수 $g'(1)$ 과 $g''(1)$ 을 구하시오.

3. (30점) 다음 물음에 답하시오.

- (a) (10점) 원점에서 함수 $f(x)$ 의 n 차 근사다항식의 정의를 쓰시오.
 (b) (10점) $f(x) = 8x + 12x^3 + 15x^6 + o(x^6)$ 일 때 함수 $f(x)$ 의 원점에서의 5차 근사다항식을 구하시오.
 (c) (10점) 함수 $f(x) = x \log(1+x)$ 의 원점에서의 3차 근사다항식을 구하시오.

4. (20점) 다음 물음에 답하시오.

- (a) (10점) $y = x^2$ 위의 점 $(1, 1)$ 에서의 곡률을 구하시오.
 (b) (10점) $y = x^2$ 위의 점 $(1, 1)$ 에서의 접축원의 방정식을 구하시오.

5. (20점) 점 $(1, 1, 1)$ 에서 타원면 $x^2 + y^2 + 2z^2 = 1$ 을 향하여 $v = (-1, -1, -1)/\sqrt{3}$ 방향으로 쏜 빛이 타원면에서 반사되어 나가는 방향을 구하라.(단위벡터로 답할 것)

6. (30점) 다음 물음에 답하시오.

- (a) (15점) 원점에서 곡면 $z = 6xy + 7$ 까지의 최단거리가 존재함을 보이시오.
 (b) (15점) (a)에서의 최단거리를 구하시오.

7. (20점) 이차곡선 $(x + 2a^2y)^2 + (5x + a^2y)^2 = 9a^2$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하라.
 (단 a 는 영이 아닌 실수)

8. (20점) 평면에서 단순폐곡선 C 의 내부가 원점을 포함하면, 각원소 벡터장 $a(x, y) = \frac{(-y, x)}{x^2 + y^2}$ 에 대하여 다음을 보이시오.

$$\int_C a \cdot ds = 2\pi$$

9. (20점) 다음 물음에 답하시오.

- (a) (10점) 다음 상황에서 발산정리가 성립함을 보이시오.

$$F = (x, y, z), \quad S : x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

- (b) (10점) 세 점 $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ 을 꼭지점으로 하는 삼각형(면)을 S 라고 하자. 이때 벡터장

$$F = yz\mathbf{i} + zx\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$$

에 대하여 스토크스 정리가 성립함을 보이시오.