2008년 12월 TA 자격시험: 선형대수학

2008년 12월 29일 14시 – 16시

1. (10점) $V := \{A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) : A = {}^tA\}$ 이고 $W := \{(a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) : a_{ij} = 0,\ i > j\}$ 일 때, $\dim(V + W)$ 를 구하라.

2. (10점) V 가 finite dimensional vector spaces 일 때, $\dim V = \dim V^*$ 임을 보여라.

3. (15점) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 10 & 0 \\ 3 & -3 & 3 & 15 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 12 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ 일 때,
   (a) A 의 row-reduced echelon form 을 구하라.
   (b) $\ker L_A$ 의 기저를 구하라.

4. (15점) $\mathcal{B} := \{{}^t(1,1), {}^t(0,1)\}$ 과 $\mathcal{C} := \{{}^t(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), {}^t(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$ 을 F^2 의 기저라고 하고, $v = {}^t(1,2)$ 라 하자. 선형사상 $L : F^2 \to F^2$ 을 $L({}^t(x,y)) = {}^t(x-y, y)$ 로 정의할 때,
   (a) $[v]_{\mathcal{B}}$ 와 $[L]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ 를 구하라.
   (b) $[L(v)]_{\mathcal{C}}$ 를 구하라.

5. (10점) $S, T \in \mathcal{L}(V,V)$ 일 때, $ST = TS$ 이면 $\ker S$ 와 $\operatorname{im} S$ 는 T-invariant subspace 임을 보여라.

6. (20점) 행렬 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ 가 있을때,
   (a) A 의 characteristic polynomial $\phi_A(t)$ 를 구하라.
   (b) A 의 minimal polynomial $m_A(t)$ 를 구하라.
   (c) A 의 diagonalizable 여부를 이유를 들어서 설명하라.

7. (10점) $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ 가 symmetric 이면, A 의 eigenvalue 는 항상 real number 임을 보여라.

8. (10점) 연립방정식 $\begin{cases} x + y + 2z = 6 \\ 2x - z = 5 \end{cases}$ 의 minimal solution 을 구하라.