2009년 1학기 TA 자격시험: 선형대수학

2009년 2월 6일 14시 – 16시

1. (10점) Dimension Theorem 을 서술하고 간단히 증명하라.

2. (10점) V 가 f.d.v.s. 일 때, $\psi : V \to V^{**}$ 를
$$\psi(v)(f) = f(v) \quad (v \in V, f \in V^*)$$
로 정의하면, ψ 는 well-defined 이다. 이때,
   (a) ψ 가 linear map 임을 보여라.
   (b) ψ 가 isomorphism 임을 보여라.

3. (10점) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 이고, $W := \{(a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{2,2}(F) : a_{21} = 0\}$ 일 때, linear operator $L : W \to W$ 를 $L(B) = AB$ 로 정의하자. W 의 ordered basis 를 $\mathcal{B} := \{e_{22}, e_{11}, e_{12}\}$ 할 때, 행렬 $[L^n]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ 을 구하라. 단 $(n \in \mathbb{N})$

4. (15점)
   (a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 일 때, $\operatorname{adj} A$ 를 구하라.
   (b) $A \in \mathcal{M}_{n,n}(F)$ 일때, $\det(\operatorname{adj} A) = (\det A)^{n-1}$ 임을 보여라.

5. (25점) 행렬 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,4}(\mathbb{C})$ 가 있을 때,
   (a) A 의 characteristic polynomial $\phi_A(t)$ 를 구하라.
   (b) A 의 minimal polynomial $m_A(t)$ 를 구하라.
   (c) Cyclic Decomposition Theorem 을 이용하여, A 를 companion matrix 들의 block diagonal matrix 로 나타내어라.
   (d) A 의 Jordan canonical form 을 구하라.

6. (10점) $f(t), g(t) \in \mathrm{P}_2(\mathbb{R})$ 일 때, $\mathrm{P}_2(\mathbb{R})$ 의 inner product 를,
$$\langle f(t), g(t) \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$$
로 정의할 때, $v := t^2/\|t^2\|$ 을 포함하는 $\mathrm{P}_2(\mathbb{R})$ 의 orthonormal basis 를 구하라.

7. (10점) $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ 일 때, A^*A 가 invertible 이기 위한 필요충분조건은 $A(= L_A)$ 가 injective map 임을 보여라.

8. (10점) 다음을 증명하거나, 거짓일 경우 반례를 들라.
   $F = \mathbb{C}$ 이고 $\dim V < \infty$ 일 때, $T \in \mathcal{L}(V, V)$ 이고 $T^*T - TT^*$ 의 eigenvalue 가 모두 nonnegative 이면, T 는 normal operator 이다.