2010년 7월 TA 자격시험: 미적분학

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오(총점 200점).

1 (각각 5점씩, 총15점). 다음 급수가 수렴하는지를 판정하시오.

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n^2-120}{n^3} \qquad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\tan\frac{1}{n}\right)^{-n^2} \qquad (3)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^2}$$

2 (20점). $\arctan x$ 의 멱급수 전개를 이용하여 다음 무한급수의 합을 구하시오.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

3 ((1)5점, (2)20점). (1) $f(x) = e^{\sin x}$ 의 $x = 0$ 에서 2차 테일러 다항식 $T_2 f(x)$ 를 구하시오.

(2) 다음 적분의 근사값을 오차가 $\frac{1}{5000}$ 을 넘지 않도록 구하시오.

$$\int_0^{\frac{1}{10}} e^{\sin x}\, dx$$

4 (20점). $f : (\mathbf{R}^3)^3 \to \mathbf{R}$ 는 $f(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ 로 정의되고, $g : \mathbf{R}^3 \to (\mathbf{R}^3)^3$ 는 $g(\mathbf{a}) = (\mathbf{a}, (1, 2, 3), (-2, -1, 3))$ 로 정의될때, $f \circ g$ 가 선형사상임을 보이고, 대응되는 행렬을 구하시오.

5 (20점).

$$X(t) = \begin{cases} (\cos(2\pi t),\ \sin(2\pi t),\ 0) & \text{if } 0 \le t \le 1 \\ (1,\ 0,\ t-1) & \text{if } 1 \le t \le 2 \end{cases}$$

로 주어진 곡선의 밀도함수가 $\mu(x, y, z) = 1 - z$ 로 주어졌을때, 이 곡선의 무게중심을 구하시오.

6 (각각 10점씩, 총20점).

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} & \text{if } (x, y, z) \ne (0, 0, 0) \\ 0 & \text{if } (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

(1) f 의 $(0, 0, 0)$ 에서 연속성을 판정하시오.

(2) f 의 $(0, 0, 0)$ 에서 미분가능성을 판정하시오.

7 (20점). $x + y^2 + z^2 = 3$, $x \ge 0$ 일때, $x + y + z$ 의 최대값, 최소값을 구하시오.

8 (20점). $\int_0^{\frac{\pi}{4}} t^3 \sin t\, dt = a$ 일때, 다음 영역의 부피를 a 로 나타내시오.

$$x^2 + y^2 + \left(z - \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\right)^2 < \left(\frac{\pi}{4\sqrt{2}}\right)^2, \qquad \sqrt{x^2+y^2} < z \tan\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$$

9 ((1)5점, (2)5점, (3)10점). *다음 적분값을 구하시오.*

(1) *곡선* $X(t) = (\cos t,\ \sin t,\ t^2)$, $0 \le t \le 2\pi$ *와 벡터장*

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2} + yz,\ \frac{x}{x^2+y^2} + zx,\ xy\right)$$

에 대하여 $\int_X \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ *를 구하시오.*

(2) $\mathbf{G}(x, y) = (-yx^2 + ye^{xy},\ y^2x + xe^{xy})$ *와*

$$D = \{(x, y) \mid 1 \le x^2 + y^2 \le 2\}$$

에 대하여 $\int_{\partial D} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{s}$ *를 구하시오.*

(3) $R = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \le z^2 + 1,\ -1 \le z \le 1\}$ *이고*

$$\mathbf{H}(x, y, z) = \left(x + e^{\sin(yz)},\ y + \log(z^2+1),\ z^2 + x^2 y\right)$$

일때, $\iint_{\partial R} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S}$ *를 구하시오.*

10 (20점). $\mathbf{R}^3$ 의 곡면 S 와 벡터장 $\mathbf{F}$ 가 다음과 같이 주어져 있을 때, $\iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ 를 구하시오. 단, S 의 향을 정하는 단위벡터 $\mathbf{n}$ 은 $(0, 1, 0)$ 에서 $\mathbf{n} = (0, 1, 0)$ 이다.

$$S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1,\ -2 \le z \le 2\} \cup \{(x, y, z) \mid y^2 + z^2 = 1,\ -2 \le x \le 2\}$$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left((y + e^{xz})(z + 2),\ (x^2 - 4)e^z,\ (x^2 - 4)\sin(\pi z)\right)$$