

2010년 1월 TA 자격시험: 미적분학

2010년 1월 27일 11:00 - 12:50

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오 (총점 200점).

- (10점) 급수 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}$ 의 수렴여부를 판정하라.
- (15점) 함수 $f(x) = 2x + \sin x$ 의 역함수를 $g(y)$ 라고 할 때, $g''(\pi + 1)$ 를 구하라.
- (15점) 원점에서 함수 $f(x) = \cos x \cdot \log(1+x)$ 의 3차 근사다항식을 구하라.
- (20점) 극좌표계에서 식 $0 \leq \sqrt{2} \cos \theta \leq r \leq 1 + \sqrt{2} \cos \theta$ 로 주어진 영역의 넓이를 구하라.
- (25점) 나선 $X(t) = (\cos t, \sin t, 2t)$ 의 $t = \frac{\pi}{2}$ 인 점에서,
 - (15점) 접축평면의 식을 구하라.
 - (10점) 곡률을 구하라.

- (15점) 함수 $f(x, y)$ 가 다음과 같이 주어져 있을 때,

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \sin(xy^2)}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

원점에서 f 의 미분가능성을 조사하라.

- (20점) 곡선 $x^2 + xy + y^2 = 3$, $y \geq 0$ 에서 정의된 함수 $f(x, y) = 4x + 4y - xy$ 의 최대값과 최소값을 구하라.
- (20점) 좌표공간에서 세개의 입체

$$0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, \quad 0 \leq z \leq \sqrt{1-y^2}, \quad 0 \leq x \leq \sqrt{1-z^2}$$

의 공통부분의 부피를 구하라.

- (15점) 좌표평면에서 영역

$$\frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1, \quad x \geq 1$$

의 넓이를 그린 정리를 이용하여 구하라.

- (25점) 구면 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 과 타원기둥 $x^2 + 4y^2 \leq 1$ 의 공통부분의 넓이를 S 라 할 때,

(a) (10점) $0 < b \leq a$ 일 때, $\int_0^b \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \frac{b}{a}$ 임을 보여라.

(b) (15점) (a)의 결과를 이용하여 S 의 값을 구하라.

- (20점) 곡면

$$S: x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad z \geq \sqrt{3}$$

와 벡터장 $F(x, y, z) = (y^2 - 3y, 2xy, yz^2)$ 에 대하여 $\left| \iint_S \text{curl } F \cdot d\mathbf{S} \right|$ 를 구하라.