2013년 7월 TA 자격시험: 미적분학

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오(총점 200점).

1 (각각 5점씩, 총15점) 다음 급수가 수렴하는지를 판정하시오.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{1}{n^2}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$ (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \sqrt{n}\right)$

2 (20점) 다음 무한급수의 값을 구하시오.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n+1)3^n}$$

3 (20점) 원점에서 $\tanh x$ 의 2차 근사다항식을 이용하여, 다음 적분의 근삿값을 오차가 $\frac{1}{5000}$ 을 넘지 않도록 구하시오.

$$\int_0^{0.1} \tanh x \, dx$$

4 (15점) $\mathbf{R}^3$ 에서 세 점 $(1,2,3)$, $(4,5,6)$, $(-1,0,a)$ 를 지나는 평면을 P 라고 하자. 점 (x,y,z) 에서 평면 P 에 내린 수선의 발을 $h(x,y,z)$ 라고 할때, $h : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ 가 선형사상이 되는 상수 a 값을 모두 구하고, 이 선형사상에 대응하는 행렬을 구하시오.

5 (20점) $\mathbf{R}^2$ 의 곡선 $y = \frac{1}{2}x^2,\ -1 \le x \le 1$ 의 중심을 구하시오.

6 (20점) 다음 함수 $f(x,y)$ 의 $(0,0)$ 에서 연속성과 미분 가능성을 판정하시오.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\tan((x+y)^3)}{x^2+y^2} & \text{if } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{if } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

7 (20점) $3x^2 + 2y^3 = 6$ 일때, $x^2 - 2y^3 + y^2$ 의 최댓값, 최솟값이 존재하면 구하시오.

8 (20점) $\mathbf{R}^3$ 에서 다음 부등식으로 주어진 영역의 부피를 구하시오.

$$0 \le z \le \sqrt{x^2+y^2} + x - x^2 - y^2$$

9 (각각 10점씩, 총20점) (a) 곡선 $X(t) = (\cos t,\ \sin t,\ t^2),\ 0 \le t \le \sqrt{\pi}$ 와 벡터장 $\mathbf{F}(x,y,z) = (-y,\ x,\ \sin z)$ 에 대하여 $\int_X \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ 의 값을 구하시오.

(b) 곡선 $X(t) = \left(\ e^t \cos(2t),\ e^t \sin(t^2),\ t(t-1)\ \right),\ 0 \le t \le 2$ 와 벡터장

$$\mathbf{G}(x,y,z) = \left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{-y}{x^2+y^2},\quad \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{x}{x^2+y^2},\quad \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

에 대하여 $\int_X \mathbf{G} \cdot d\mathbf{s}$ 의 값을 구하시오.

10 (각각 15점씩, 총30점) (a) $\mathbf{R}^3$ 의 영역 $R:\ z \ge 0,\ 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4 - z^2$ 과 벡터장

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(e^y \sin z,\ e^z \sin x,\ 3\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$$

에 대하여 $\iint_{\partial R} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ 의 값을 구하시오.

(b) 곡면 $S:\ (x-1)^2 + y^2 = 1 + |z| \le 4$ 와 벡터장

$$\mathbf{H}(x,y,z) = (xye^z,\ xy\sin(\pi z),\ yz\cos(\pi z))$$

에 대하여 $\iint_S \operatorname{curl} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S}$ 를 구하시오. 단, S 의 향을 정하는 단위벡터 $\mathbf{n}$ 은 $(1, \sqrt{2}, 1)$ 에서 $\mathbf{n} \cdot (0,1,0) > 0$ 이다.