2014년 7월 TA 자격시험: 미적분학

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오(총점 200점).

1 (각각 5점씩, 총15점) 다음 급수가 수렴하는지를 판정하시오.

$$\text{(a)} \ \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{n+1}{n}} \qquad \text{(b)} \ \sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{n^2+1}{n^2} \qquad \text{(c)} \ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(n^2\right)\right)$$

2 (20점) 다음 무한급수의 값을 구하시오.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2n^2+5n+2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

3 (20점) 다음 적분의 근삿값을 오차가 $\frac{1}{1000}$ 을 넘지 않도록 구하시오.

$$\int_2^{2.1} \sqrt{1+x^3}\, dx$$

4 (15점) $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ 는 평면 $ax + by + az + b = 0$ $(a^2 + b^2 \neq 0)$ 에 대한 정사영이고, $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ 는 직선

$$x - a = \frac{y-2a}{2} = z - a$$

에 대한 정사영이다. $g \circ f$ 가 선형사상이 되도록 $a,\ b$ 에 관한 필요충분조건을 구하시오.

5 (20점) 다음 포물선의 밀도가 촛점으로부터 거리로 주어질 때, 이 곡선의 질량을 구하시오.

$$y = x^2, \quad -1 \le x \le 1$$

6 (20점) 다음 함수 $f(x,y)$ 의 $(0,0)$ 에서 연속성과 미분 가능성을 판정하시오.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(e^x-1)^2 \sin y}{x^2+y^2} & \text{if } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{if } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

7 (20점) $x^3 + x^2y + 3y^3 = 24$ 일때, $x^2 + 2y^2$ 의 최댓값, 최솟값이 존재하면 구하시오.

8 (20점) $\mathbf{R}^3$ 에서 다음 부등식으로 주어진 영역의 부피를 구하시오.

$$3\sqrt{x^2+y^2} + 2x \le 2x^2 + 2y^2 \le 8x, \quad 0 < z < 3\sqrt{x^2+y^2}$$

9 (각각 10점씩, 총20점) (a) 곡선 $X(t) = (\sin t,\ e^t,\ t),\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ 와 벡터장

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(yz\sin(2xz) + z,\ \sin^2(xz) + y^2,\ xy\sin(2xz) + x\right)$$

에 대하여 $\int_X \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ 의 값을 구하시오.

(b) $\mathbf{R}^2$ 의 영역 $D:\ x^2 + y^2 \ge 1,\ |x| + |y| \le 2$ 와 벡터장

$$\mathbf{G}(x,y) = \left(\frac{y^3}{3+3x^2},\ y^2x + y^2 \arctan x + \arctan^3 y\right)$$

에 대하여 $\int_{\partial D} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{s}$ 의 값을 구하시오.

10 (각각 15점씩, 총30점) (a) $\mathbf{R}^3$ 의 영역 $R:\ 12 - 2x^2 - y^2 - 3z^2 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 9$ 와 벡터장

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (\, x + z\sin y + e^z,\ y + x\sin z + e^x,\ z + y\sin x + e^y\,)$$

에 대하여 $\iint_{\partial R} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ 의 값을 구하시오. 단, ∂R 의 향은 R 의 외부로 향하고 있다.

(b) 곡면 $S:\ x^2 + y^2 + z^2 = \frac{9}{8}\pi^2, \quad -\pi \le y + z \le \frac{\pi}{2}$ 와 벡터장

$$\mathbf{H}(x,y,z) = \sin^2(y+z)\left(y,\ x^2 \arctan\left(\frac{y+z}{2}\right),\ y+z\right)$$

에 대하여 $\iint_S \operatorname{curl} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S}$ 를 구하시오. 단, S 의 향을 정하는 단위벡터 $\mathbf{n}$ 은 $\left(\pi, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ 에서 $\mathbf{n} \cdot (0,0,1) > 0$ 이다.