2014년 1월 TA 자격시험: 미적분학

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오(총점 200점).

1 (각각 5점씩, 총15점) 다음 급수가 수렴하는지를 판정하시오.

$$\text{(a)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \arctan\frac{1}{n} \qquad \text{(b)}\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\log n}} \qquad \text{(c)}\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos\frac{n^7}{e^n}\right)$$

2 (25점) 다음 무한급수의 값을 구하시오.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+10}{2n^2+5n-3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

3 (20점) $x = 1$ 에서 근사다항식을 이용하여

$$\int_1^{1.1} \arctan(x^2)\,dx$$

의 근삿값을 오차가 $\frac{1}{3000}$ 을 넘지 않도록 구하시오.

4 (20점) $n \times n$ 행렬 A 에 대하여 $\det A = \det A^t$ 임을 보이시오.

5 (20점) 타원 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ 위의 점 $(\sqrt{2},\ 1)$ 에서 곡률을 구하시오.

6 (20점) 다음 함수 $f(x, y)$ 의 $(0, 0)$ 에서 연속성과 미분 가능성을 판정하시오.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x \tan y}{x^2+|y|} & \text{if } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{if } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

7 (20점) $x^3 + 3xy + y^3 = 5,\ y \geq 0$ 일때, $x^2 + 2y$ 의 최댓값, 최솟값이 존재하면 구하시오.

8 (20점) $\mathbf{R}^3$ 의 영역 $(x^2+y^2)^2 \leq x, \quad 0 \leq z \leq 2x - \sqrt{x^2+y^2}$ 의 부피를 구하시오.

9 (각각 10점씩, 총20점) (a) 곡선 $X(t) = \big(\cos(t^2),\ \sin(t^2),\ e^t\,\big),\ \ 0 \leq t \leq \sqrt{3\pi}$ 와 벡터장

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(yz\sin(2xy) + e^x + \frac{-y}{x^2+y^2},\ \ xz\sin(2xy) + \frac{x}{x^2+y^2},\ \ \sin^2(xy)\right)$$

에 대하여 $\int_X \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$ 의 값을 구하시오.

(b) $\mathbf{R}^2$ 의 영역 $D = \{(x,y) \mid 0 \leq x^2+y^2 \leq \sqrt{3}x\}$ 와 벡터장

$$\mathbf{G}(x,y) = \big(\sin(e^x) + y,\ \cos(e^y) + x^2\,\big)$$

에 대하여 $\int_{\partial D} \mathbf{G}\cdot d\mathbf{s}$ 의 값을 구하시오.

10 (각각 10점씩, 총20점) (a) $\mathbf{R}^3$ 의 영역 $R:\ 0 \leq z \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4$ 과 벡터장

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \big(-x\cos(xyz) + z^2,\ e^x \tan z,\ z^2 + z\cos(xyz)\big)$$

에 대하여 $\iint_{\partial R} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$ 의 값을 구하시오.

(b) 곡면 $S:\ e^x y^2 + e^{2x} z^2 = 1,\ -2 \leq x \leq 0$ 와 벡터장

$$\mathbf{H}(x,y,z) = \big(x(x+2)\sin^3 y,\ z\log(x+3),\ ye^{-x}\big)$$

에 대하여 $\iint_S \operatorname{curl}\mathbf{H}\cdot d\mathbf{S}$ 를 구하시오. 단, S 의 향을 정하는 단위벡터 $\mathbf{n}$ 은 $(-1, 0, e)$ 에서 $\mathbf{n}\cdot(0,0,1) > 0$ 이다.