2015년도 여름, TA 평가시험
선형대수학

학번 ______________________ 이름 ______________

♣ 표기법: 교재마다 표기법이 상이하므로 몇가지 표기법을 다음과 같이 정의합니다.

- $\mathbb{F}$: field. (유한체, $\mathbb{R}$(실수), $\mathbb{C}$(복소수), ...)
- V: <u>유한 차원</u> 벡터 공간 (본 시험에서 나오는 벡터 공간은 모두 유한 차원이라 가정.)
- $W \leq V$: W는 V의 부분공간. 역시 유한차원.
- $M_{m\times n}(\mathbb{F})$: field $\mathbb{F}$ 위에서의 $m \times n$ 행렬들의 집합
- A^t: A의 전치행렬(transpose)
- $\phi_T(t), \phi_A(t)$: linear operator T, 정방행렬 A에 대한 특성다항식(characteristic polynomial)
- $m_T(t), m_A(t)$: linear operator T, 정방행렬 A에 대한 최소다항식(minimal polynomial)

1. (10점) 다음 명제가 맞으면 T, 틀리면 F를 표시하시오. (각 문제당 맞으면 2점, 틀리면 -2점)
   (a) $A, B \in M_{n\times n}(F)$에 대하여 특성다항식과 최소다항식이 모두 같으면 두 행렬은 similar 하다. $\cdots$( )
   (b) $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$에 대하여 A가 대칭행렬이면 대각화 가능하다. $\cdots$( )
   (c) $\lambda \in \mathbb{F}$에 대하여 행렬 $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ 는 $\mathbb{F}$가 무엇이든 항상 대각화가 불가능하다. (유한체 포함) $\cdots$( )
   (d) $W \leq V$에 대하여 $(W^{\perp})^{\perp} = W$ $\cdots$( )
   (e) $W_1, W_2, W_3 \leq V$에 대하여, $V = W_1+W_2+W_3$ 이고 $W_1\cap W_2 = W_1\cap W_3 = W_2\cap W_3 = 0$이면 $V = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$이다. $\cdots$( )

★ 이제부터 나오는 모든 문제에 풀이과정 또는 근거를 명시하시오.

2. (10점) $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$에 대하여 정의된 다음 det 함수에 대하여 $\det(A) = \det(A^t)$임을 보이시오.

$$\det A = \sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma)a_{\sigma(1)1}\cdots a_{\sigma(n)n}$$

3. (10점) 다음 물음에 답하시오.

(a) (5점) 다음 Vandermonde 행렬의 행렬식을 구하시오.

$$\begin{pmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$$

(b) (5점) 다음 연립방정식의 해 중 x_0의 값을 Vandermonde 행렬의 행렬식과 Cramer's Rule을 이용하여 계산하시오.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

4. (10점) 좌표평면에서 정의된 이차곡선 $2x^2 - 4xy + 5y^2 = 1$은 타원을 회전시킨 도형이다. 이 타원의 장축 및 단축의 방향 및 길이를 구하시오. (이유를 꼭 명시하시오.)

5. (20점) 다음 행렬 $A \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$에 대하여 물음에 답하시오.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 5 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) (10점) 특성 다항식 $\phi_A(t)$, eigen-value, eigen-vector, 최소 다항식 $m_A(t)$를 구하시오.

(b) (10점) Jordan canonical form과 그 때의 Jordan canonical basis를 구하시오.

6. (10점) 특성 다항식이 $\phi_A(t) = (t-2)^4$인 행렬 $A \in M_{4\times4}(\mathbb{R})$의 similarity classes는 몇 개인가? 각 클래스에 포함된 행렬을 하나씩 들고, 그 행렬의 $\dim\ker(A-2I)$을 얘기하시오.

7. (10점) $\mathbb{R}^3$의 세 벡터 $w_1 = (1,1,0), w_2 = (1,0,1), w_3 = (0,1,1)$ 으로부터 Gram-Schmidt orthogonalization process를 적용하여 $\mathbb{R}^3$의 orthonomal basis $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$ 를 구하시오.

8. (10점) T를 복소 내적 공간 V에서의 linear operator 라 할 때, 조건 'T is normal'과 'T의 eigen-vector 들로 이루어진 V의 orthonormal basis가 있다'는 것이 필요충분조건임을 보이시오. (Hint. Schur's Theorem)

9. (10점) T를 복소 내적 공간 V에서의 linear operator 라 할 때, 조건 'T is unitary'와 'T is normal and $|\lambda| = 1$ for every eigenvalue λ of T'는 것이 필요충분조건임을 보이시오. (Hint. Spectral Theorem)