2015년 1월 TA 자격시험: 미적분학

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오(총점 200점).

1 (각각 5점씩, 총15점) 다음 급수가 수렴하는지를 판정하시오.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\arctan n}}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(\log n)\right)$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(\log n)\right)$

2 (25점) 다음 무한급수의 값을 구하시오.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+n+1}{n} \left(\frac{1}{27}\right)^n$$

3 (20점) $x = \pi$ 에서 근사다항식을 이용하여

$$\int_{\pi}^{\frac{10}{3}} \sqrt{1+\sin x}\, dx$$ 의 근삿값을 오차가 $\frac{1}{1000}$ 을 넘지 않도록 구하시오.

4 (20점) $\mathbf{R}^3$ 에서 직선 $1+a-x = y+3b-1 = z$ 를 중심으로 180° 만큼 회전하는 사상 f 가 선형사상이 될 필요충분조건을 구하고, 이 선형사상에 대응하는 행렬을 구하시오.

5 (20점) 다음 곡선의 $t=1$ 에서 접촉평면과 곡률을 구하시오.

$$X(t) = \big(t,\ t^2,\ \log t\big)$$

6 (20점) 다음 함수 $f(x,y)$ 의 $(0,0)$ 에서 연속성과 미분 가능성을 판정하시오.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y\tan x}{2x-\sin x} & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

7 (20점) $x^3+3xy+y^3=1$ 일때, x^2+y^2 의 최댓값, 최솟값이 존재하면 구하시오.

8 (20점) $\mathbf{R}^3$ 에서 다음 부등식을 만족하는 영역의 부피를 구하시오.

$$0 < \sqrt{x^2+y^2} \le x^2+y^2 \le z\sqrt{x^2+y^2} \le 2\sqrt{x^2+y^2}+y$$

9 (각각 10점씩, 총20점) (a) 곡선 $X(t) = \big(\cos t,\ \sin^2 t,\ t\big),\ 0 \le t \le \pi$ 와 벡터장

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{(x,\ y,\ z)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + \left(\frac{x}{x^2+y},\ \frac{y}{x^2+y},\ z\right)$$

에 대하여 $\int_X \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$ 의 값을 구하시오.

(b) $\mathbf{R}^2$ 의 영역 $D\ :\ 1 \le x^2+y^2 \le 10-4x^2-y^2$ 에서 정의된 벡터장

$$\mathbf{G}(x,y) = \left(ye^{x^2+y^2}+x^2,\ -xe^{x^2+y^2}+2y\right)$$

에 대하여 $\int_{\partial D} \mathbf{G}\cdot\mathbf{n}\,ds$ 를 구하시오. (단, $\mathbf{n}$ 은 영역의 외부를 향하는 수직인 단위벡터이다.)

10 (각각 10점씩, 총20점) (a) $\mathbf{R}^3$ 의 영역 $R:\ x^2+y^2+z^2 \le 2,\quad 0 \le z \le 1$ 에서 정의된 벡터장

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \sin(\pi z)(x^2+y^2+z^2-2)\left(\cos(x^2y),\ \frac{1}{\sqrt{z^3+1}},\ \arctan(yz^2)\right) + (zx,\ zy,\ z^2)$$

에 대하여 $\iiint_R \operatorname{div}\mathbf{F}\, dV_3$ 의 값을 구하시오.

(b) 곡면 $S:\ 4-x^2-y^2 = z,\ 0 \le z \le 2$ 와 다음 벡터장 $\mathbf{H}$ 에 대하여 $\iint_S \operatorname{curl}\mathbf{H}\cdot d\mathbf{S}$ 를 구하시오.

$$\mathbf{H}(x,y,z) = \operatorname{grad}\,(x^2\sin(yz)) + z(z-2)(\arctan z,\ \cos x,\ z^2+1) + (y,\ z,\ 0)$$

단, S 의 향을 정하는 단위벡터 $\mathbf{n}$ 은 $(\sqrt{2},1,1)$ 에서 $\mathbf{n}\cdot(0,0,1) < 0$ 이다.