$Aut(B^n)$

2005년 10월 25일 다변수복소해석학 강의노트, 기록 김혜선

$Aut(B^n)$ =the set of all biholomorphic maps $B^n \to B^n$

$z = (z_1, \cdots, z_n) \in C^n$, $\mid z \mid = z_1\overline{z_1} + \cdots + z_n\overline{z_n}$

$B^n = \{z \in C^n :\mid z \mid < 1\}$

일변수의 경우 B^1 =unit disk $\forall\varphi \in Aut(B^1)$은 다음 꼴이다.
$\varphi(z) = e^{i\theta_0}\frac{z-a}{1-\overline{a}z}, a \in B^1$
$= \frac{e^{i\theta_0}(z-a)}{e^{-i\theta_0}(1-\overline{a}z)} = \frac{Az+B}{\overline{B}z+\overline{A}}$ where $A = e^{i\theta_0}, B = -ae^{i\theta_0/2}$.

이것을 normalize by $\frac{A}{\sqrt{1-|a|^2}} = \alpha_0, \frac{B}{\sqrt{1-|a|^2}} = \beta_0$하면 $\varphi(z) = \frac{\alpha_0 z+\beta_0}{\overline{\beta_0}z+\overline{\alpha_0}}$, 여기서 $\mid \alpha_0 \mid^2 - \mid \beta_0 \mid^2 = 1$.

B^n을 다음과 같은 관점에서 보자.(사영기하적 관점)
$C^{n+1} = \{(\zeta_1, \cdots, \zeta_{n+1})\}, C^{n+1} - \{0\}/\sim$
$\zeta, \eta \in C^{n+1}, \neq 0, \zeta \sim \eta \Longleftrightarrow \eta = \lambda\zeta,$ some $\lambda \in C^*$ i.e., colinear.
$CP_n = C^{n+1} - \{0\}/\sim$
$\zeta \in C^{n+1} - \{0\}$, $[\xi]$ equivalence class. i.e., a point of CP_n.
$[\xi]$의 좌표,$(\zeta_1/\zeta_{n+1}, \cdots, \zeta_n/\zeta_{n+1}) \in C^n$, if $\zeta_{n+1} \neq 0$.
C^{n+1}에 hermitian inner product F, signature$(n, 1)$ 가 되게 다음과 같이 정의하자.
$\zeta, \eta \in C^{n+1}, F(\zeta, \eta) = -\sum_{j=1}^n \zeta_j\overline{\eta_j} + \zeta_{n+1}\overline{\zeta_{n+1}}$.
그러면 $\{\zeta \in C^{n+1} : F(\zeta, \zeta) > 0\}$은 open cone 이다. 이제 $\{\zeta \in C^{n+1} : F(\zeta, \zeta) > 0\} = M$으로 두면 CP_n으로의 projection π에 대하여 $\pi(M)$을 좌표로 표현하면 $z_j = \frac{\zeta_j}{\zeta_{n+1}}$으로 보고, $-(\zeta_1\overline{\zeta_1} + \cdots + \zeta_n\overline{\zeta_n}) + \zeta_{n+1}\overline{\zeta_{n+1}} > 0$가 된다. 부등식의 양쪽을 $\zeta_{n+1}\overline{\zeta_{n+1}}$으로 나누어주

면, 위 부등식은 $-(z_1\overline{z_1}+\cdots+z_n\overline{z_n})+1>0$, 즉, unit ball $B^n \subset C^n$이 된다.

우리는 이제 F를 보존하는 C^{n+1}의 선형변환 전체의 군 G를 생각하자: G : subgroup of $GL(n+1,C)$이고
$g \in G \Longleftrightarrow F(g\zeta, g\eta) = F(\zeta,\eta), \forall \zeta,\eta \in C^{n+1}$.
Introduce a matrix

$$ß = \begin{pmatrix} -I_n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & & & 0 \\ 0 & -1 & & & 0 \\ 0 & & \ddots & & 0 \\ 0 & & & -1 & 0 \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

그러면 $ß^2 = I_{n+1}$이고 벡터 $\zeta = \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_{n+1} \end{pmatrix}$ 이라하면 $F(\zeta,\eta) = \zeta^t ß\overline{\eta}$.
그러면 $(g\zeta)^t ß\overline{(g\eta)} = \zeta^t ß\overline{\eta}$가 되고, 즉 $\zeta^t g^t ß\overline{g\eta} = \zeta^t ß\overline{\eta}, \forall \zeta,\eta \in C^{n+1}$.
따라서 $g^t ß\overline{g} = ß$.

Proposition $| \, detg \, |= 1$

(증명)$\det g^t$ det ß det $\overline{g} =$ det ß이므로 $| \ \det g \ |^2 = 1$이 된다.

Proposition에 앞선결과의 식의 양변에 ß를 곱하면 $g^t ß \overline{g} ß = ß^2 = I_{n+1}$이 되므로 $g^t ß \overline{g} ß g^t = g^t$이고 $ß \overline{g} ß g^t = I_{n+1}$. 이제 양변에 ß를 곱하면 $\overline{g} ß g^t = ß$를 얻는다.

이제 $g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, A_{n\times n}, D \in C$라 놓자.

그러면 위의 논리들로부터 $\begin{pmatrix} \overline{A} & \overline{B} \\ \overline{C} & \overline{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I_n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^t & C^t \\ B^t & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I_n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$를 얻고 이것으로 부터 다음의 세식을 얻는다.

$$\begin{cases} \overline{A}A^t - \overline{B}B^t = I_n \\ \overline{C}C^t - D\overline{D} = -1 \\ -\overline{A}C^t + \overline{B}D = 0. \end{cases}$$

이제 위 식을 만족시키는 $(n+1) \times (n+1)$matrix의 집합을 $U(n,1) =$ unitary group of $sig(n,1)$이라고 부르자.

$g \in U(n,1)$ 를 $g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \zeta \in C^{n+1} - \{0\}, \zeta = (\zeta_1, \cdots, \zeta_n, \zeta_{n+1})$ 라 두고 , $\zeta' = (\zeta_1, \cdots, \zeta_n)$으로 두면 $g\zeta = \begin{pmatrix} A\zeta' + B\zeta_{n+1} \\ C\zeta' + D\zeta_{n+1} \end{pmatrix}$.가 된다. projection하여 CP_n의 좌표$\{z_j = \frac{\zeta_j}{\zeta_{n+1}}\}$로 표현하면 $[g\zeta] = \frac{A\zeta' + B\zeta_{n+1}}{C\zeta' + D\zeta_{n+1}} = \frac{Az+B}{Cz+D} \equiv \varphi_g(z)$.

Theorem (Osgood)

If $f : \Omega \to \Omega$ 여기서 Ω : open $\in C^n$ is holomophic, bijective, then $f^{-1} : \Omega \to \Omega$ is also holomorphic.

Proposition

$g \in U(n,1), \varphi_g : B^n \to B^n$ is injective.

(증명) $\varphi_g(z) = \varphi_g(z^{'})$라 하자. $z, z^{'} \in B^n$. Let $L = \{\zeta \in C^{n+1} : \frac{\zeta_1}{\zeta_{n+1}} = z_1, \cdots, \frac{\zeta_n}{\zeta_{n+1}} = z_n\} \cup \{0\} = \{\zeta \in C^{n+1} : \zeta = \lambda(z_1, \cdots, z_n, 1), \lambda \in C\}$ and same for $z^{'}$, i.e., $L^{'} = \{\zeta \in C^{n+1} : \frac{\zeta_j}{\zeta_{n+1}} = {z_j}^{'}, j = 1, \cdots, n\} \cup \{0\}$ 그러면 $\varphi_g(z) = \varphi_g(z^{'})$으로 부터 $g(L) = g(L^{'})$을 알고 g는 non-singular 이므로 $L = L^{'}$이 되고 따라서 $z = z^{'}$이다.

Proposition φ_g is onto $B^n \to B^n$

2005년 10월 27일 다변수복소해석학 강의노트

φ_g **is onto**.

(증명) $\forall p = (p_1, \cdots, p_n) \in B^n, L = [(p_1, \cdots, p_n, 1)]$ line in C^{n+1}을 생각하자. 그러면 g가 non-singular matrix 이므로 $L^{'} := g^{-1}(L)$ 도 line이 되고 이것은 곧 $[g^{-1}(p_1, \cdots, p_n, 1)]$이 된다. 그리고 g는 F를 보존하므로 $g^{-1}(p_1, \cdots, p_n, 1) \in M$이다. 따라서 $g(L^{'}) = L$, 즉 $\varphi_g([g^{-1}(p_1, \cdots, p_n, 1)]) = p$이다.

$\{\varphi_g : g \in U(n,1)\}$ is a subgroup of $\mathrm{Aut}(B^n)$.
$g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \varphi_g(z) = \frac{Az+B}{Cz+D}$.

Proposition G acts on B^n transitively.(곧 B^n is a homogeneous space 임을 말해준다.)

(증명) $\forall p \in B^n, \varphi_g(p) = 0$이 되는 $g \in U(n,1)$가 존재함을 보이면 충분하다.
만일 $g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 가 있다면 $Ap + B = 0$이다. 그런데 원래 g의 조건으로부터 $\overline{A}A^t - \overline{B}B^t = I_n, \overline{A}C^t = \overline{B}D, \mid D \mid^2 - \overline{C}C^t = I$를 만족시켜

야 하므로 첫번째 식을 변형하면 $\overline{A}A^t - \overline{A}\overline{p}p^tA^t = I_n$을 알고, 또 다시 변형하면 $\overline{A}(I_n-\overline{p}p^t)A^t = I_n$이고 두번째 식을 변형하면 $\overline{A}C^t = -\overline{A}pD$이고 $C^t = -\overline{p}D$를 알 수 있다. 따라서 $C = -D\overline{p}^t, \overline{C} = -\overline{D}p^t$가 되고 이것을 마지막 식에 대입을 하면 $\mid D \mid^2(1-p^t\overline{p}) = 1$이 된다. $p \in B^n$에 대하여 이런 D가 존재하면 C가 존재함을 알고 A의 존재가 B를 결정함을 알고 있으므로 $\overline{A}(I_n - \overline{p}p^t)A^t = I_n$을 만족하는 A의 존재를 말하면 충분함을 안다. 만약 그런 A를 구했다하면 $\varphi(z) = \frac{A(z-p)}{(1-\overline{p}^tz)D} = \frac{Az-Ap}{D-D\overline{p}^tz} = \frac{Az+B}{Cz+D} = \varphi_g(z)$이며 ,$\varphi(p) = 0$ 가 된다. 이것이 구하는 φ_g이다.

먼저 $H := I_n - \overline{p}p^t$가 hermitian positive definite임을 관찰하자.

(이유): $\forall q \in C^n, q^t(I - \overline{p}p^t)\overline{q} = q^t\overline{q} - q^t\overline{p}p^t\overline{q} = \mid q \mid^2 - \mid < q, p > \mid^2 \geq \mid q \mid^2(1 - \mid p \mid^2) > 0$ if $q \neq 0$. Linear algebra 에 나오는 다음과 같은 사실을 상기하자. $\exists$unitary matrix U such that $U^tH\overline{U} := H' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, each $\lambda_j > 0$.

이제 $\triangle = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1}^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n}^{-1} \end{pmatrix}$ 라 하면 $\triangle H' \overline{\triangle} = I_n$이다. 따라서 $\triangle U^tHU\overline{\triangle} = I_n$이고 $D \in R$ 이므로 $\overline{\triangle} = \triangle$이고 $p = U\triangle$이라 하면 $p^tHp = I_n$. 따라서 $A = p^t$라 하면 A는 조건을 만족시킨다.

일반적으로 X : a set 이라 할 때 G : a group of bijections $\varphi : X \to X$.
G acts transitively $\Longleftrightarrow \forall p, q \in X, \exists \varphi \in G$ such that $\varphi(p) = q$.
H = isotropy subgroup for $p \in X$. $\Longleftrightarrow H = \{\varphi \in G \mid \varphi(p) = p\}$.
Then $G/H = X$.

Isotropy subgroup of $0 \in B^n$.

$g \in U(n,1)$ 중에서 0를 고정시키는 $g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$는 어떤 모양인가? $\varphi_g(0) = \frac{Az+B}{Cz+D} = \frac{B}{D} = 0$-vector. 따라서 $B = 0$-vector.
그런데 원래 $U(n,1)$의 방정식은 $\overline{A}A^t - \overline{B}B^t = I_n, \overline{A}C^t = \overline{B}D, \mid D \mid^2 - \overline{C}C^t = 1$ 로 부터 $\overline{A}A^t = I_n, C = 0, \mid D \mid^2 = 1$가 되고, Isotropy subgroup은 $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}, A \in U(n)$. 즉 $U(n) \times U(1)$이다. 따라서 $B^n = U(n,1)/U(n) \times U(1)$이다.

다음과 같은 사실이 알려져 있다.

1) $\Omega \subset C^n$ bounded complete Reinhardt domain, $\varphi \in \mathrm{Aut}\Omega, \varphi(0) = 0$. Then φ is linear: 즉, $\varphi(z) = \begin{pmatrix} A \\ matrix \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$꼴이다.

2) 특히 $\Omega = B^n$이면 $A \in U(n)$이다.

$G =$**Aut**(B^n) **전부**

$\forall \psi \in \mathrm{Aut}(B^n), \psi(0) = p$라 하자. 그러면 $g \in U(n,1)$이 존재하여 $\varphi_g(p) = 0$. 그러면 $\varphi_g \circ \psi \in \mathrm{Aut}(B^n)$(원점을 원점으로 보내는) 따라서 $\varphi_g \circ \psi = U \in U(n)$이고 $\psi = {\varphi_g}^{-1} \circ U$이며 U는 $\begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in U(n,1)$와 동일시 되므로 $U \in G$이다. 따라서 $\psi \in G$.