엘리 카르탄의 생애와 업적

Method of moving frame 을 중심으로

엘리 카르탄 (Élie Cartan, 1869-1951) 은 군론과 기하학의 역사에서 가장 큰 이름중 하나이며 허만 바일 (1885-1955) 와 함께 20세기 전반을 대표하는 수학자라 할 수 있을 것이다. 카르탄의 방대한 수학적 업적과 현대수학에 끼친 영향을 감안할 때 그의 업적 전반을 논한다는 것은 물론 필자의 능력 밖의 일이다. 이 글에서는 다만 [AR]와[CC]를 발췌, 요약하여 카르탄의 생애 전반을 개관하고 그의 아이디어로부터 발전한 수학 중 필자가 이해하고 있는 지극히 적은 부분을 말하고자 한다. 그의 사후에 편집 발행된 전집 [C]는 아래와 같이 3부 6권으로 되어있다.

1부: 리군, 대칭공간

2부: 연립편미분방정식, 리 Pseudogroup, 외미분계

3부: 미분기하,

3부 2권의 끝에 그의 업적 전반을 잘 설명하고 있는 천-쉐발리 [CC] 와 와이트헤드[W] 의 추도사가 수록되어 있다.

출생과 교육:

엘리 카르탄은 프랑스 남동부 이세르 지방, 그르노불에서 북쪽으로 50여 킬로 떨어진 작은 마을 돌로뮤에서 대장쟁이의 아들로 1869년4월9일 태어났다. 돌로뮤는 알프스에서 가깝고 알프스에서 발원하는 이세르강이 이곳을 지나 론강으로 합류하고 있다. 엘리의 아버지 조셉과 어머니 안느 카르탄은 소박 근면한 전형적인 남 프랑스 농촌사람들의 삶을 살면서 2남2녀를 키웠다. 엘리는 그들의 둘째 자식이자 첫 아들이었다. 엘리보다 두 살 위의 누나 젠느-마리는 의상제조(재봉)업에 종사하였고 세 살 아래의 남동생 레온은 부친을 이어받아 대장쟁이가 되었다. 엘리보다 아홉 살 아래의 막내 여동생 안나는 오빠의 영향으로 수학을 전공하여 여자고등학교 교사가 되었다. 엘리 카르탄의 아버지와 남동생은 건장한 체격인데 반하여 그는 키가 작고 약골이었다. 그러나 총기가 넘치고 비상한 기억력을 가진 소년이었으며 몹시 수줍어하는 성격이었다. 19세기 말, 프랑스에서는 카르탄의 가정처럼 가난한 서민에게 자식을 대학까지 교육시킨다는 것은 엄두도 못내는 일이었다. 엘리가 돌로뮤에서 초등학교를 다니던 10살 때 당시 이지역의 초등교육 감독관으로 Antonin Dubost 가 이 마을을 방문하였다. Dubost 는 후일 프랑스 상원의장까지 된 사람인데 그가 소년 엘리 카르탄의 재주가 비범함을 보고 장학금을 타기 위한 경시대회에 응시할 것과 그의 초등학교 교사 M. Dupuis 에게 엘리가 경시대회에 합격할 수 있도록 지

도해 줄 것을 부탁하였다. 엘리 카르탄은 경시대회를 힘들이지 않고 통과하여 장학금을 받아 대학까지 갈 수 있게 되었다. 당시 프랑스의 중등교육기관은 각 지방의 ‘college’ 와 대학진학을 준비하는 국립고등학교인 lycée 가 있었다. 경시대회를 합격하고 첫 5년간은 가까이 있는 소도시 Vienne 에 소재한 College에서 문법, 수사학, 철학 (소위 삼학, Trivium)을 배우고 다음은 그르노블 Lycée에서 그리고 파리에 있는 Jasnon-de-Sailly Lycée (Grand Lycée)에서 산술, 기하, 천문학, 음악 (소위 사학,quadrivium)을 배웠다. Grand Lycée 의 동급생이며 훗날 프랑스의 저명한 물리학자 가 된 Jean-Baptiste Perrin (1870-1942) 과는 일생 돈독한 우정을 유지하였다.

1888년 Lycée를 졸업한 엘리 카르탄은 수학을 전공하기 위하여 파리 고등사범학교(l’École Normale Supériure)에 입학하였다. 당시 파리에는 13세기에 세워진 소로본느 대학, 프랑스 혁명때 세워진 에콜 폴리테크닉과 고등사범학교, 이 세 곳이 수학을 전공할 수 있는 대학이었다. 그는 고등사범학교 3년 과정을 이수하는 동안 소로본느에서도 수강하였다. 대학시절 그는 다음과 같은 대가들로부터 배우는 행운을 누렸다.

에르미트 (Chales Hermite, 1822-1901), 해석학, 대수학, 및 수론

타네리 (Jules Tannery, 1848-1910), 집합론

다르부 (Gaston Darboux, 1842-1917), moving frame 방법의 창시자중 한사람

아펠 (Paul Appell, 1855-1930), 해석학, 역학

피카르드 (E?mile Picard, 1856-1941), 미분방정식론, 군론의 기하적 응용

구르사 (Edouard Gousat, 1858-1936), 미분방정식론, 변환군

포앙카레 (Henri Poincare?, 1854-1912). 군론과 쌍곡기하를 연결, 보형함수이론 창안

이 중에도 특히 포앙카레로부터 가장 큰 영향을 받았다. 소로본느 대학에서 수강한 포앙카레의 강의가 늘 머리를 맴돈다고 후일 카르탄은 술회하였다.

박사학위논문, 단순 유한차원 연속군

카르탄이 대학 학부생이던 당시(1888-1891) 파리 고등사범학교는 독일 라이프치히 대학에서 가르치고 있던 리(Sophus Lie, 1842-1899) 와 활발히 교류하고 있었다. 타네리, 다르부, 피카르드 등이 리의 이론에 깊은 관심을 갖고 있었고 이들의 영향으로 베시오 (Ernest Vessiot, 1865-1952) 와 트레세 (Arthur Tresse, 1868-1958) 는 리 아래서 연구하기 위하여 라이프치히로 유학하고 있었다. 베시오가 파리로 돌아온 후 피카르드와 공동으로 리의 연구를 확장한 “미분방정식의 적분가능성 문제와 연속군의 응용“이란 논문을 발표하였다 리-피카르드-베시오의 이 일련의 연구에서 상미방의 해를 연쇄적인 적분으로 구할 수 있음과 미분방정식의 대칭군이 가해임

이 동치라는 사실이 밝혀졌다. 따라서 대칭군이 단순군을 포함하게 되면 미분방정식은 적분으로 해를 구할 수 없으며 여기서부터 단순 리군의 목록을 작성하는 문제가 제기되었다. 카르탄은 고등사범학교 동기생인 트레세를 통하여 이 분야를 접하게 되었다. 카르탄은 파리 고등사범학교를 졸업하고 한해동안 군복무를 한 후 하사 (sergeant) 로 제대하였다. 그가 군복무를 하는 동안 그의 친구 트레세는 라이프치히 대학에서 리의 박사과정학생이 되어 있었다 라이프치히에서 돌아온 트레세는 카르탄에게 킬링 (Wilhelm Killing, 1847-1923)의 논문 "변환들의 유한차원 연속군의 구조에 관하여"를 보여주었다. 이 논문은 당시 라이프치히에서 발간되던 학술지 Mathematisch Annalen 에 실려 있었는데 여기에 단순 리 군의 분류에 대한 중요한 결과들이 수록되어 있었다. 트레세는 카르탄에게 킬링의 논문에서 nilpotent group (group of zero rank) 에 관한 부분에 오류가 있다는 사실을 알려 주었다. 트레세는 또 라이프치히에서 클라인과 리와 함께 연구하는 엥겔 (Friedrich Engel, 1861-1941)의 박사과정 학생 한 사람이 킬링의 논문의 잘못된 부분을 바로잡는 연구과제로 "변환들의 유한차원 연속군의 구조, 즉히 zero rank group 에 관하여" 라는 제목의 논문을 쓰고 박사학위를 받았다고 알려주면서 이번에는 킬링의 논문의 주정리와 그 증명에 오류가 없는지 조사해 보는 것은 좋은 연구과제가 될 것이라고 말하였다. 카르탄은 그의 친구 트레세의 제안을 따라 1892-1894 두해 동안 킬링의 논문을 연구한 결과 킬링의 주정리에는 오류가 없고 킬링이 증명에 사용한 방법은 단순 리군의 "root "를 사용하고 있는 방법인데 매우 독창적이고 광범위하게 적용가능한 방법이라는 사실을 알게 되었다. 카르탄은 킬링의 논문의 부정확한 부분을 수정해 가면서 복소수체위의 semi-simple 리 대수의 분류에 관한 연구를 수행하였다. 1892년에는 다르부와 타네리의 초청으로 리가 반년동안 파리에 체류하게 되었다. 리가 파리로 온 주목적은 실은 카르탄을 만나기 위한 것이었다. 후일 카르탄은 리에 대하여 다음과 같이 회상하였다.

"리는 프랑스의 젊은 수학자들과 어울려 토론하기를 즐겼다. 생 미셜 가의 소르스 카페에서 식탁의 대리석 판에 연필로 수식을 적어가며 토론하는 그들의 모습을 보는 것은 어렵지 않은 일이었다. 리는 키가 크고 금빛 수염을 기르고 안경너머로 푸른 눈동자가 빛났으며 늠름한 체구에 전형적인 북구인의 용모를 지녔다. 리는 비할데 없이 성실하고 순수한 사람이었으며 동시에 쉽게 접근할 수 있는 너그럽고 정다운 성품의 소유자였다."

1893년 카르탄은 단순 연속군의 구조, 그리고 유한차원 연속군의 구조, 그의 첫 논문인 이 두편의 결과를 파리 학술원 학술지에 소개하고 자세한 증명은 라이프치히 대학의 회보에 리의 추천으로 출판하였다. 복소수체위의 단순 리 대수의 분류문제를 완전히 해결한 이들 결과로 다르부와 리를 공식적인 공동지도교수로 하여 박사학

위논문 '변환들의 유한차원 연속군의 구조'를 제출, 1894년(25세) 소로본느 대학으로부터 박사학위를 받았다.

학위후 10년간

카르탄의 박사학위후 10년간 (1894-1904, 25세-35세)은 그의 고유한 이론과 방법론이 윤곽을 잡아가고 평생의 연구 방향이 설정된 기간이었다. 학위직후에는 학위논문의 연속으로 실수체위의 semi-simple 리 대수의 분류문제, 복소 및 실수체위의 결합법칙이 성립하는 대수에 대한 연구, semi-simple 리 군의 표현론 연구로 이어갔다. 이 기간(1894-1896)에 그는 몬테펠리에 대학에서 강사로 있었다. 그 후에 7년간(1896-1903) 리옹 대학의 강사로 있었는데 이 기간에는 적분불변량 (integral invariants), 파피안 시스템(Pfaffian system), 미분방정식의 동치문제등을 연구하였다. 그는 그라스만 대수을 외미분계에 적용하여 외미분계에 관한 그의 이론을 정립해 나갔다. 주어진 파피안 시스템의 모든 양립조건을 찾아내어 involutive 한 시스템으로 prolongation 하는 그의 아이디어는 나중 1930년대 이후에 카르탄-켈러 이론으로 완성되었다. 리옹 대학에 재직하던 마지막 해인 1903년 당시 리옹의 교육감독직에 있던 화학자 비앙코니의 딸 마리-루이스 비앙코니(1880-1950) 와 결혼하고 낭시 대학으로 직장을 옮겼다.

중견교수시절

낭시 대학의 전기 및 응용역학 학과의 교수로 6년간 (1903-1909, 34세-40세) 재직하는 동안 첫째 아들 앙리(1904), 둘째 아들 쟝(1906) 이 여기서 태어났다. 이 시기에 그는 무한차원 변환군(훗날 Lie pseudogroup 이라 부르게 된)과 외미분계에 관한 연구를 하였다. 연립미분방정식에 관한 그의 방법은 특정한 미지함수나 독립변수에 의존하지 않는, 좌표에 의존하지 않는 완전히 새로운 방법이었으며 그는 이 방법으로 일반해가 무엇인지 정의하였다. 일반해 뿐 아니라 특이해도 연구하였다. 주어진 비방에 대하여 새로운 미방의 시스템을 정의하여 이것의 일반해가 원 방정식의 특이해가 됨을 보였다. 1909년에 카르탄은 파리로 옮겨 소로본느대학의 강사가 되고 1912년(43세) 포앙카레의 추천으로 정교수가 되었다. 그후에는 고향 돌로뮤에 집을 짓고 거기 자주 가서 쉬곤 하였다. 고향집에 내려가면 수학연구도 하고 아버지와 남동생의 대장간일을 도와주기도 하였다. moving frame method 와 Pfaffian sytem 에 관한 연구를 하다가 1913년 단순 리군 연구로 돌아왔다. 일차세계대전(1914-1918) 이 발발한 이듬해 카르탄의 나이 46세에 징발되어 육군 하사관(sergeant) 계급으로 군복무를 하였다. 그의 모교인 파리 고등사범학교에 설치된 군 병원에서 근무하며 1차대전이 끝날 때까지 틈틈이 Bäcklund transform, deformation of hypersurfaces 연구하였다. 전쟁 후에도 계속하여 moving frmae 방법을 사용한 부분다양체 이론

을 연구하였다. 1916년(47세) 이후에는 주로 미분기하의 연구를 하였다. 클라인의 에르랑엔 프로그램이 일반적인 기하를 기술하는데 적합하지 않음은 허만 바일과 베블렌(Oswald Veblen, 1880-1960)이 지적한 바 있지만 카르탄은 moving frame 방법을 창안함으로 클라인의 아이디어를 보완하였다. 이는 다르부의 동력학의 방법을 일반화 한 것이다. moving frame 방법은 또한 다발묶음(fibre bundle) 개념으로 인도하였으나 카르탄 자신은 다발묶음에 대하여 명명하거나 더 이상 연구하지 않았다. 1926년 이후에는 대칭공간의 기하를 연구하였다. 대칭공간의 아이디어는 클리포드(William Clifford, 1845 - 1879), 케일리 (Arthur Cayley, 1821 - 1895) 가 창안하고 카르탄보다 조금 먼저 허만 바일이 위상적인 방법을 동원하여 발전시키고 있었다. 1913년(44세)에는 클리포드 대수의 표현론으로부터 spinor 개념을 발견하고 후일 양자역학의 기본수학역할을 하게 되는 spinor이론을 창안하였다. 1922년(53세) 이후부터는 일반상대성이론을 위한 기하학인 "unitary field" 이론과 대칭공간, 일반적인 접속이론 등을 중점적으로 연구하였다. 카르탄보다 앞서 허만 바일은 리만기하의 일반화인 최초의 "unitary field" 이론을 창안하였다. 카르탄은 바일과 달리 torsion을 허용하는 접속을 사용하였다. 1922년의 논문 "아인슈타인의 중력방정식에 관하여" 이후에는 상대성이론에 관한 일련의 논문을 발표하였다. 1931년(62세)에는 수학자인 맏아들 앙리(Henri Cartan, 1904-2008)와 공동연구를 수행하였다. 복소다변수공간의 각변수에 관한 회전운동에 닫혀있고 유계인 영역으로 정칙변환군이 transitive 한 것이 어떤 것이 있는가 결정하는 문제를 연구하였다. 이 문제는 20세기 초에 포앙카레가 관심을 가졌던 문제이었다. 다음해 1932년(63세)에는 복소공간의 실초곡면의 동치문제에 대한 연구결과를 발표하였는데 이 이론은 1960년대와 1970년대에 Tanaka-Chern-Moser 의 CR 기하로 발전하여 다변수복소함수론의 발전에 기여하였다. .

엘리 카르탄의 수학의 아이디어들은 그가 박사학위를 하고 20년이 지날 때 까지도 다른 아무도 이어 발전시키지 않았다. 이미 포앙카레가 그의 업적을 높이 평가하여주어 소로본느 대학의 정교수가 되기는 하였지만 여전히 그는 수학계에서 널리 알려진 존재는 아니었다. 그는 주로 고립되어 연구하였다. 그의 아들 앙리와 다변수복소함수론 분야의 공동연구 할 때에도 각기 자기 부분을 가지고 따로 연구하였다고 한다. 그의 강의는 명강의이어서 수강하는 학생들은 문제의 진수를 이해하였다고 생각하며 지적인 기쁨을 맛보곤 하였지만 그의 아이디어를 진정으로 이해하고 사용하는 사람은 별로 없었고 카르탄은 자신의 주변에 사람을 모아 '학파'를 이룰 줄도 몰랐다. 당시 피카르드는 학생들이 쉽게 접근할 수 있는 문제를 많이 갖고 있어 학생들에게 인기가 있었던 반면 카르탄은 학생이 별로 없었다. 수학자'족보'에 보면 그에게서 박사학위를 받은 사람은 네 사람인데 그 중에 Charles Ehresmann 과 일본인 수학자 Yano Kentaro 가 있다. 그러나 1925년경 허만 바일의 군 표현론의 논문들이 나오고 1930년대에 들어서서 앙드레 베유가 엘리 카르탄의 논문의 중요성을

언급하면서 카르탄은 수학계에 널리 알려지게 되었고 그의 수학의 영향력이 갈수록 증대 되었다. 20세기 전반의 수학자로써 그 이후의 수학에 끼친 영향의 크기에 있어서 그는 포앙카레와 힐베르트 다음 쯤 위치하게 되었다.

만년의 삶

엘리 카르탄은 1893 첫 논문을 쓴 이후 1949 년까지 무려 56년동안 논문과 책을 저술하고 연설문과 절대평행이동에 관해 아인슈타인과 교신한 편지 등 도합 이백여 편의 글을 썼다. 그의 집안에는 장수하는 유전인자가 있는 것 같다. 그의 부모가 모두 장수하였고 엘리 카르탄 본인도 82세까지 당시기준으로서는 오래 살았다. 저명한 수학자인 그의 맏아들 앙리는 104세를 향수하였다. 그가 노경에 들어와서야 명성을 얻게 된 되는 첫째 그의 극도로 수집어하는 성격때문이었고 또한 20세기 초의 프랑스의 수학은 집합론과 함수론이 중심을 차지하고 있었기 때문이었다. 1930년대에 외국에서 먼저 카르탄을 높이 평가하여 폴란드, 노르웨이, 이탈리아 등의 여러 학술원의 외국인회원이 되고 1931 프랑스 학술원 회원으로 선출되었으며 1946년에는 학술원 원장으로 선출되었다. 그의 소로본느 대학에서의 재직 30년중 마지막 16년간은 고등기하 학과장을 역임하였으며 1940년 은퇴하였다. 그는 국제수학자대회(ICM)에서 다음과 같이 세차례 기조연설을 하였다.

1924년 토론토 국제수학자대회, 군론과 최근의 미분기하 연구
1932년 취리히 국제수학자대회, 리만 대칭공간에 대하여
1936년 오슬로 국제수학자대회, 소푸스 리의 군론과 현대기하학의 발전

1940년 "수학의 발전에 끼친 프랑스의 영향 (The influence of France in the development of Mathematics)" 이라는 제목으로 벨그라드에서 행한 그의 연설에는 프랑스수학에 대한 자긍심과 그의 수학관을 엿볼 수 있다. 그는 이 연설에서 프랑스 수학자 데가르트, 파스칼, 페르마, 드알랑베르, 라그랑쥬, 라플라스, 르장드르, 몽주, 푸리에, 코시, 퐁슬레, 갈로아, 에르미트, 다르부, 포앙카레의 업적을 개관하고 나서 다음과 같이 말하고 있다.

"과학의 다른 분야에 비해서 수학은 더욱 일련의 추상화과정을 통하여 발전한다. 수학자는 실수를 피하고 좀 더 쉽게 생각하기 위하여 문제의 요체를 뽑아 따로 분리하여 생각한다. 그래서 '수학자는 그가 무엇을 얘기하고 있는지 모르거나 무엇을 얘기하고 있는지는 안다고 하더라도 그것이 존재하는지는 모른다'는 우스개소리가 있다. 그러나 프랑스의 수학은 실재로부터 멀어진 적이 없다. 프랑스 수학에 있어 논리의 중요성은 부차적이다. 수학적 활동에서 다른 인간의 활동과 마찬가지로, 바르게 생각하는 것과 바른 문제를 설정하는 것, 이 둘 사이에 균형이 잘 이루어져야 한다. 그런 의미에서 프랑스 수학자는 바른 직관을 가지고 가장 근본적인 문제를 선택

하는 지혜와 직관을 가지고 있었으며 이들의 해법은 과학의 전반적인 발전에 가장 강력한 영향을 미쳤다“

1939년 그의 70세 생일에는 소로본느 대학에서 그를 위한 성대한 파티를 열어주었다. 이 자리에 대학과 학술원의 많은 사람들과 옛 친구 트레세 가 참석하였고 저명한 지휘자 샤를르 문슈가 카르탄의 둘째 아들 장 (그는 아버지 엘리보다 먼저 세상을 떠났다)이 작곡한 To the memory of Dante를 연주하였다. 소로본느에서 은퇴한 후에도 강연 저술, 논문발표, 학술원 행정, 등으로 1949년까지 활동하였다. 그의 왕성한 연구활동 이면에는 항상 고요히 안정된 가정이 있었다. 그는 3남1녀의 자녀를 두었었는데 맏아들 앙리는 저명한 수학자, 둘째 아들 장은 작곡가, 셋째 아들 루이는 물리학자, 막내이자 딸인 엘렌 (Hélène Cartan, 1917-1952)은 수학자이었다. 그러나 그는 두 아들을 먼저 보내는 아픔을 겪기도 하였다. 둘째 아들 장(Jean Cartan, 1906-1932)는 파리 음악학교를 졸업하고 현악사중주, 성가곡, 관현악곡 등을 작곡한 재능 있는 작곡가 이었으나 25세에 폐결핵으로 세상을 떠났다. 물리학자인 셋째 아들 루이(Louis Cartan, 1909-1943)는 Poitiers 대학의 교수로 재직하며 원자력 연구에 몰두하다가 2차대전이 발발하자 레지스탕스에 참여, 체포되어 독일군에게 참수형을 당했다. 이 소식은 2년이나 지난 1945년에 가족에게 전해졌는데 노경의 카르탄 부부에게 어떤 고통을 주었을지는 짐작할 수 있다. 그와 가족은 1917-1936 베르사이유 부근 르 쉐스네이 마을에서 살았고 그 후에는 1951년 그가 세상을 떠날 때까지 15년간 오를레안 다리 부근의 조드당 가 95번지의 아파트 에 세 들어 살았다. 1950년에 엘리 카르탄의 아내 Marie-Louise 가 세상을 떠나고, 그 이듬해 1951년 5월6일에는 엘리 카르탄 본인이, 그 다음해 1952년에는 딸 엘렌이 세상을 떠났다. 그들은 고향 돌로뮤의 가족 무덤에 나란히 묻혀있다. 조르당가 95번지 아파트에는 그 후 큰 아들 앙리와 그 가족이 살았다.

Moving frame 과 파피안 시스템

19세기 수학에서 가장 큰 발견으로는 사물의 대칭성을 기술하고 계산하는 군의 개념과 비유클리드 기하학, 이 두 가지를 들 수 있다. 이 두 흐름은 19세기가 끝나갈 무렵 엘리 카르탄 시대에 이르러 하나의 큰 흐름으로 합류하여 20세기를 흘러가게 된다. Method of moving frame 은 바로 이 합류하는 지점의 수학이라 할 수 있다. 군의 개념은 5차이상의 대수방정식의 불가해성을 증명하기 위한 갈로아와 아벨의 이론에서 비롯되었다. 가령 유리계수다항식 방정식 에 대한 갈로아군의 한 원소는 유리수집합을 고정시키며 하나의 해를 다른 해로 보내는, 즉 방정식 의 대칭성을 표현하는 확대체의 동형사상이다. 대수방정식을 풀 수 있다(가해, solvable)는 것은 방정식이 거듭제곱의 역산을 반복하는 것으로 분해된다는 의미이다. 그리고 대수방정식의 가해성은 갈로아군의 가해성과 동치라는 것이다. 아벨과 갈로아의 이론이

나온 지 대략 반세기가 지난 후에 노르웨이의 수학자 리는 미분방정식에 대하여도 동일한 추론이 가능함을 관찰하였다. 갈로아 이론과 현저한 차이점은 미분방정식의 대칭군은 연속군이며 이를 생성하는 무한소 대칭들의 집합 (후세에 리 대수라 명명된)이 군의 구조를 결정한다는 점이다. 미분방정식의 대칭성이란 독립변수와 종속변수 공간의 변환으로써 방정식과 해를 보존하는 변환을 말한다. 리가 먼저 관찰한 바는 n계의 상미방이 n차원의 solvable 대칭군을 가지면 계의 상미방의 일반해를 반복 적분함으로 얻을 수 있다는 것이었다. 가령 일계상미방

$$F(x,u,\frac{du}{dx})=0 \tag{1}$$

에 대하여 독립변수와 종속변수의 공간 $\{(x,u)\}$ 의 국소벡터장

$$\vec{v}:=\xi(x,u)\frac{\partial}{\partial x}+\phi(x,u)\frac{\partial}{\partial u}$$

이 (1) 에 대한 무한소대칭이라 하자. 그러면 $\vec{v}$ 를 좌표벡터장으로 하는 적절한 좌표변환이 존재한다. 실제로

$\vec{v}\neq 0$ 이라 가정하고 $\eta(x,u)$ 를 $\vec{v}$ 의 제일적분이라 하자. 공간 $\mathbb{R}^3=\{(x,u,w)\}$ 의 벡터장

$$\xi\frac{\partial}{\partial x}+\xi\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial w}$$

의 제일적분

$$\Psi(x,u,w),\quad \frac{\partial\Psi}{\partial w}\neq 0$$

라 하고 $\Psi=0$ 를 w 에 관하여 풀어 $w=\zeta(x,u)$ 를 얻어

$$\begin{aligned} y&=\eta(x,u)\\ w&=\zeta(x,u)\end{aligned} \tag{2}$$

로 변수변환하면 $v=\frac{\partial}{\partial w}$ 이다. 따라서 (1)을 새변수 (y,w) 로 표현하면 w를 포함하지 않게 된다. 즉

$$\frac{dw}{dy}=h(y)$$

꼴이어서 적분가능하고 따라서

$$w=\int h(y)dy:=H(y) \tag{3}$$

을 얻는다. (2)를 (3)에 대입하여 (1)의 해 $u=u(x)$를 얻는다. 리는 상미방의 가해성 문제와 연관하여 주어진 개수의 변수에 대하여 모든 가능한 변환군을 찾는 문제를 연구하였다. 그러나 킬링, 트레세, 그리고 카르탄은 모든 가능한 군의 구조를 찾는 문제로, 해석학적인 의상을 벗어 버린, 순수한 대수적인 문제로 단순화하였다. 연속군에 대한 기본적인 관찰은 마치 고생물연구자들이 공룡의 작은 뼈 조각 하나로 공룡전체를 재구성 하는 것과 같이[CC] 군의 대역적 구조를 그것의 무한소 변환으로부터 재구성 할 수 있다는 사실이다. 카르탄은 이 문제에 미분형식을 사용하였다.

논의를 간단히 하기 위하여 선형변환군($n \times n$ 행렬의 군) G의 값을 갖는 국소적인 함수 g 를 생각하자. G 가 군이므로 무한소 변환 dg 를 단위원으로 이동한 $g^{-1}dg :=\omega$ 는 G의 단위원에서의 무한소 변환이다. ω를 미분하면 $d(g^{-1}) = -g^{-1}dgg^{-1}$ 이므로

(4) $$d\omega = -\omega \wedge \omega \qquad \text{모러-카르탄 방정식}$$

을 얻는다. (4)은 전형적인 completely integrable 한 1계의 완비계이다. 따라서 한 점에서의 초기값에 대하여 유일한 해가 존재한다. 이 해 공간이 G 의 리대수이다. (4)는 또한 카르탄의 moving frame 방법의 원조이기도 하다. Moving frame 방법을 처음 사용한 사람은 Martin Bartels(1769-1836)라는 독일 수학자인데 비 유클리드 기하의 창시자인 로바체브스키와 가우스가 젊은 시절 이 분에게서 배웠다고 한다. 그 후 공간곡선 기하에 나오는 Frenet 공식이 1847년에 등장하였고 다르부가 1887년경에 곡면이론에서 moving frame 을 사용하였다. 엘리 카르탄은 미분형식을 사용하여 가장 일반적인 moving frame 방법을 창안하여 그의 만년에 여러가지 구조의 기하학에 광범위하게 사용하였다. 카르탄의 moving frame 방법은 클라인의 에르랑엔 프로그램을 다양체로부터 frame bundle 로 들어올린 것이라 할 수 있다. 일양공간(homogeneous space)의 부분공간의 국소기하는 카르탄의 moving frame 방법의 효용성을 가장 잘 보여주고 있는데 복소공간의 실초곡면의 기하학인 카르탄-타나카-천-모저(Cartan-Tanaka-Chern-Moser)이론이 그 대표적인 예이다. 보다 친숙한 예로 $\mathbb{R}^3$ 의 곡면 M 을 생각하자. M에 adapted frame, 즉, 단위직교벡터장 $e = (e_1, e_2, e_3)$ 의 첫 두 벡터가 M 에 접한다 하자. $x = (x_1, x_2, x_3)$ 을 $\mathbb{R}^3$ 의 직교좌표계라 하고

$$dx = \theta^i e_i \qquad \text{(summation convention)}$$

이라 두고 이를 미분하면

$$0 = (d\theta^j + \theta^i \wedge \omega_i^j)e_j, \quad \text{단} de_i = \omega_i^j e_j,$$

을 얻는다. 여기서 e는 $O(3)$ 값을 갖는 함수이므로 $\omega := (\omega_i^j)$는 $o(3)$ 값을 갖는다, 즉 skew-symmetric 행렬이다. 각 성분이 영이므로 $\theta := (\theta^1, \theta^2, \theta^3)^t$ 라 두면

(5) $$d\theta = -\omega \wedge \theta$$

을 얻는다. 행렬로 표현하면

(6) $$\begin{bmatrix} d\theta^1 \\ d\theta^2 \\ d\theta^3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & \omega_2^1 & \vdots & \omega_3^1 \\ -\omega_2^1 & 0 & \vdots & \omega_3^2 \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ -\omega_3^1 & -\omega_3^2 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \\ \theta^3 \end{bmatrix}$$

1827년에 출판된 가우스의 곡면론의 중요한 결론은 곡면은 구부려도 변치않는 곡면 자체의 불변량(가우스 곡률)을 갖는다는 것이었다. 그리고 이 고유한 곡률은 곡면

의 단위수직벡터의 변화율의 크기(determinant)와 같다는 것이다. 이 발견은 기하적 불변량과 intrinsic geometry 란 개념으로 인도하였으며 비 유클리드 기하학이 태동할 시대를 준비하였다. (6)은 미분형식을 사용하여 가우스의 곡면론을 간결하게 다시 표현한 것이다. (6)을 M에 국한(pull back)시키면 $\theta^3 = 0$ 이므로 (6)의 일부분, 즉 우변의 행렬의 첫 2×2 부분행렬에 해당하는

$$\begin{bmatrix} d\theta^1 \\ d\theta^2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & \omega_2^1 \\ -\omega_2^1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \end{bmatrix}$$

이 곡면의 intrinsic geometry 이다. ω_2^1 가 곡면의 접속(connection)이다. 그리고 (6)의 나머지 부분이 extrinsic geometry, 즉 곡면의 이차근본형식이다. 하나의 moving frame e 에 대하여 e의 변화율을 e로 위와 같이 표현하였듯이 카르탄은 moving frame 전체의 집합; 즉 한 점에서의 frame 들의 변환군이 H 인, frame 들의 집합 P 에서 H의 리 대수 $\mathcal{H}$ 값을 갖는 1-형식 ω 로 접속을 정의하였다. 위의 예 $\mathbb{R}^3$ 에서 점 x 에서의 단위직교기저(ortho-normal frame) 들의 집합은 아핀 변환군 $E(3)$, 즉,

$$\begin{bmatrix} O(3), & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

꼴의 4×4 행렬의 집합과 동일시된다. 하나의 moving frame e 를 다발묶음 $E(3) \to \mathbb{R}^3$ 의 section 으로 보면 e 에 관한 접속은 $E(3)$ 의 모러-카르탄 형식 ω 의 pull back $e^*\omega$ 이다. 곡면 M 의 adapted frame e에 관한 접속 (6)은 다음 도식에서 $E(3)$ 의 Maurer-Cartan 형식 ω를 pull back 한 것이다.

$$\begin{array}{ccc} & & E(3), \quad \omega \\ & \nearrow & \downarrow \\ M & \hookrightarrow & \mathbb{R}^3, \end{array} \tag{8}$$

카르탄은 그의 접속이론을 G-구조의 동치문제(equivalence problem) 로 일반화시켰다. G 를 $GL(n, \mathbb{R})$의 부분 리군이라 하자. 편의상 지금부터는 frame 이라 함은 접벡터의 기저 대신 1-형식의 기저, 즉 coframe 을 의미한다. n 차원의 미분다양체 M 위의 G-구조란 G 의 원소로 변환하는 모든 frame 들의 집합을 말한다. 리만 구조란 $O(n)$-구조를 의미한다. G-구조의 접속이란 G의 리 대수 $\mathcal{G}$ 값을 갖는 M 상의 1-형식 ω이다. $\mathbb{R}^3$ 의 경우, ω는 $o(3)$값을 가지며 이는 $E(3)$의 모러-카르탄 형식을 pull back 한 것이다. 따라서 (4)를 만족한다. 모든 일양공간의 경우에는 이와 같다. 그러나 일반적으로는 $d\omega$ 와 $-\omega \wedge \omega$ 와의 차이가 존재하는데 이 차이를 Ω, 즉

$$\Omega := d\omega + \omega \wedge \omega \tag{9}$$

라 하자. Ω의 존재는 P 위의 파피안 시스템 ω 가 integral manifold 를 갖지 못하게 되는 원인이 된다. $\Omega = 0$ 이면 P 는 integral manifold 로 foliate 된다. 여기서 integral manifold 란 기하적으로는 frame 의 평행이동, Ω 는 G-구조의 곡률이다. $P \to M$ 의 임의의 절단 $\theta = (\theta^1, \ldots, \theta^n)$ 에 대하여 (5)가 만족되는 유일한 접속 ω의

존재를 밝히면 G-구조의 동치문제를 풀었다고 말한다. $\mathbb{C}^2$ 에서 레비-형식이 비퇴화인 두 실초곡면 사이에 holomorphic congruence 를 판정하는, 카르탄 자신이 명명한 이름에 따르면, pseudo-conformal geometry 는 G-구조의 동치문제에 관한 그의 이론의 첫번 응용이었다. 동치문제를 비롯하여 파피안 시스템에 접근하는 카르탄의 아이디어는 오늘날 과결정 연립 편미분방정식의 해의 존재를 밝히는데 이용된다. n-계의 연립 편미분 방정식은 미지함수의 n-jet 공간의 부분 다양체상의 파피안 시스템 $\theta = (\theta^1, \theta^2, \cdots)$ 의 해곡면을 발견하는 문제로 귀착된다. 해곡면에서는 θ 를 영으로 할 뿐 아니라 $d\theta$ modulo θ 를 영으로 하므로 순차적으로 파피안 시스템을 부분다양체로 축약시켜 나가는 방볍이 사용되고 있다. 이는 미방의 해의 존재가 방정식의 대칭성에 기인한다는 리의 관찰의 정당함을 말해주고 있다. 다만 리가 상미방에 대하여 밝힌 바 상미방의 적분가능성과 대칭군의 가해성의 관계에 비하여 과결정 연립 편미분방정식에서는 방정식의 대칭성이 교묘히 숨어있는 경우가 대부분이고 따라서 해의 존재와 방정식의 대칭성의 관계도 복잡하고 미묘하리라 생각된다.

참고문헌

[AR] M. A. Akivis and B. A. Rosenfelt, Élie Cartan, Amer. Math. Soc. , 1993

[B] R. Bryant, Élie Cartan and geometric duality, A lecture given at the Institut d'Élie Cartan on 19 June 1998

[C] E. Cartan, Œuvres complètes: Part I, Groupes de Lie, vols. 1-2, 1952; Partie II, Algèbre, Formes difféentielles, systèmes différentielles, vols. 1-2, 1953; Partie III, Divers, géométrie différentielle, vols. 1-2, 1955, Gauthiers-Villars, Paris

[Col] A. John Coleman, Groups and physics-dogmatic opinions of a senior citizen, Notices of AMS, Vol. 44-1(January 1997), 8-17

[CC] S. S. Chern and C. Chevalley, Élie Cartan and his mathematical works, Bull. Amer. Math. Soc. 58(1952), 217-250

[D] R. Debever(ed), Élie Cartan-Albert Einstein: letters on absolute parallelism 1929-1932, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1979

[O] P. Olver, Applications of Lie Groups to Differential Equations, Springer-Verlag, New York, 1986

[Wh] J. H. C. Whitehead, Obituary. Élie Joseph Cartan (1869-1951), Obit. Notices Roy. Soc. London 8(1952), 71-95

한종규

서울대학교 수리과학부 명예교수