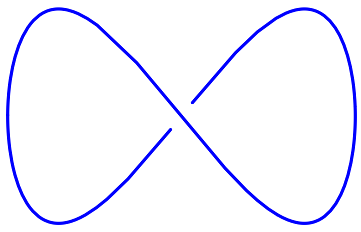
기하학 고사

서울대학교 2007학년도 대학원 후기 모집 (석사과정)

2007년 5월

1. 좌표평면에서 정의된 함수
$$f(x,y) := \arctan\left((x^2+y^2)/2\right)$$
에 대하여 기울기(gradient) 벡터장을 $\mathbf{F}$ 라 하자. 즉, $\mathbf{F} = \nabla f$. 이때 곡선
$$\gamma(t) := (\sin t, \sin^3 t), \qquad 0 \le t \le \pi/2$$
에 대하여 다음 선적분을 구하라.
$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}.$$

2. 호의 길이로 매개화된 평면 곡선 $\gamma(s)$ 에서 단위 접(tangent)벡터장을 $\mathbf{t}(s)$, 단위 법(normal)벡터장을 $\mathbf{n}(s)$ 라 하자. 곡선 γ 가 단사(injective)이고 그 상이 아래 그림과 같을 때
$$\int_\gamma \frac{d\mathbf{t}}{ds}\cdot\mathbf{n}\, ds$$
를 구하라.



3. 좌표공간에서 곡면 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 을 도시하고, 임의의 두 점 사이의 측지선(geodesic)이 어떻게 주어지는지 논하라.

4. 좌표공간에서 곡면 $x^6+y^4+z^2=1$ 의 가우스 전곡률(total Gaussian curvature)을 구하라.