Qualifying Exam for MS

(Differentiable Manifolds)

2007-II

1. Let σ be the restriction of the 1-form $x_1dx_2 - x_2dx_1 + x_3dx_4 - x_4dx_3$ on $\mathbb{R}^4$ to the standard unit sphere S^3. Does there exist a point in S^3 where σ vanishes? (`10 points`)

2. If X is any closed connected subset of the plane, and U is a bounded connected component of $\mathbb{R}^2 - X$, show that every closed 1-form on U is exact. (`10 points`)

3. A vector field is said to be *complete* if its integral curves are defined for all time. On the plane $\mathbb{R}^2$, is the vector field $x^2\dfrac{\partial}{\partial x} + y^2\dfrac{\partial}{\partial y}$ complete? (`10 points`)

4. Let $\gamma = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1\right\}$. Compute

$$\int_\gamma \frac{(y-1)dx - xdy}{x^2 + (y-1)^2},$$

where γ is oriented counter-clockwise with respect to the origin. (`10 points`)

5. Let Σ be a compact oriented regular surface without boundary in $\mathbb{R}^3$. Does there exist a point p on Σ such that the Gaussian curvature $K(p)$ is positive? (`10 points`)

6. Are there three vector fields X, Y, and Z on the 3-sphere S^3, which are linearly independent at every point in S^3. (`10 points`)

후기

[1]여러가지 풀이가 있을 수 있다. S^3 의 점 $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ 에서 접공간 $TS^3{}_x$ 는

$$\{v \in \mathbb{R}^4 \mid x \cdot v = 0\}$$

으로 생각할 수 있다. 특히

$$Jx := (-x_2, x_1, -x_4, x_3)$$

는 접공간의 한 원소이고,

$$\sigma_x(Jx) = -({x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + {x_4}^2) = -1 \neq 0$$

이므로 $\sigma_x \neq 0$ 이다. 정답률 8% 아!

[2] 거창한 호몰로지 또는 코호몰로지 이론을 쓸 수도 있지만, 가능한 맨손으로 해결하는 것도 좋음.

First, one shows that in U all loops are contractible (otherwise X is not connected) Then, if we denote the one form by σ and fix $x_0 \in U$. For any $x \in U$, choose a smooth path γ connecting x_0 and x, one can set $f = \int_\gamma \sigma$ then f is well-defined and $df = \gamma$.

[3]자주 나오는 문제. 적분곡선을 이해하지 못하면 직업을 바꿀 생각을 하는 것이 좋다. 정답률 35%

[4]반년 전 문제를 부호를 바꾸어 낸 것. 정답은 -2π. 정답률 46%

[5]곡면의 분류법을 거창하게 쓰는 학생들이 있지만, 그런 것이 하나도 필요 없다. 그저 한 점에서 가장 멀리 떨어져 있는 점을 보면 된다. 정답률 45%

[6]삼차원 구는 Lie 군이고, 모든 Lie 군은 이러한 성질을 가지고 있다는 것은 쉽게 알 수 있다. 한 점에서의 일차독립인 벡터들을 다른 곳에 옮겨 심으면 일차독립인 벡터장을 얻을 수 있기 때문이다. 이 문제는 또 다른 의미에서 아주 유명한 문제이고 여러번 출제된 문제이다. 사실 n 차원 구 S^n 의 모든 점에서 일차독립인 n 개의 벡터장이 있는 경우는 $n = 0, 1, 3, 7$ 뿐이다. 이 문제는 네 개의 division algebra

$$\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$$

와 관련 있고, 따라서 한쪽 방향을 보는 것은 쉽다. 정답률 0% ㅜ ㅜ