석사 자격고사 '미분다양체론' 채점 후기

2007년 2월

Differentiable Manifolds

1. Let $\mathbf{F}$ be a vector field on $\mathbb{R}^3$ given by

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x, 2y, 3z),$$

and let S be the sphere of radius r with center at the origin. (10 pts)

   (a) What is the div $\mathbf{F}$? (4 pts)

   (b) Compute the following surface integral

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n},$$

   where $\mathbf{n}$ is the unit outward normal vector field on S. (6 pts)

. . . .

이 문제는 자주 출제된 문제라 정답률이 91% 나 된다. Stokes 정리를 묻는 문제이다. 하지만 공의 부피가 $\frac{4\pi}{3}r^3$ 이라는 것을 모르는 답안이 있었다.

---

2. Find the real dimension of $SU(n)$. (5 pts)

. . . .

이 문제도 정답률이 86% 된다. "Special Unitary Group" 을 아는 사람은 다 풀 수 있는 문제이다. Lie Group 과 그것의 Lie Algebra 가 차원이 같다는 것을 알면 쉽게 해결할 수 있다.

---

3. Let $\mathbf{X}(x, y) = (x + y, 2x - 3y)$ be a vector field on $\mathbb{R}^2$, and let $\omega = 2xdy + ydx$. Compute the Lie derivative $L_{\mathbf{X}}\omega$. (10 pts)

. . . .

정답률 83%. 함수공간에서 정의된 자기사상인 리미분 L_X 가 미분형식공간에서의 "derivation" 으로 확장되면서 d 와 교환 가능한 사상이 된다는 것을 알면 단순한 계산 문제임.

---

4. Let $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1\}$. Compute

$$\int_\gamma \frac{-ydx + (x-1)dy}{(x-1)^2 + y^2},$$

where γ is oriented counter-clockwise with respect to the origin. (10 pts)

. . . .

정답률 30%. 이 문제를 단순한 Stokes 정리라고 생각하면 오해. (Stokes 정리를 두 가지나 내는 것은 흔한 일이 아니라고 생각함.) 주어진 미분형식은 닫힌 형식이지만, 적분하는 곡선의 내부에 미분형식이 정의되지 않은 점이 있음. 그러므로 Stokes 정리를 바로 적용할 수는 없음. 그러나 Stokes 정리 덕분에 닫힌 형식을 적분 할 때에는 곡선의 homotopy class 에만 의존한다는 것을 안다. 따라서 특이점 근방의 조그만 원에서 적분하면 됨. 좌표계의 기준을 특이점으로 바꾸어 생각하면 조그만 (또는 커다란) 원을 따라 각원소형식을 적분하는 것이므로, 정답은 '한바퀴'를 뜻하는 2π.

---

5. Let Σ be a compact oriented regular surface without boundary in $\mathbb{R}^3$. Show that if Σ is not homeomorphic to S^2 then there is a point $p \in \Sigma$ such that the Gaussian curvature $K(p) = 0$. (10 pts)

. . . .

정답률 18%. 이런 흔한 문제의 정답률이 이것 밖에 안된다는 것은 창피한 일. 삼차원 유클리드 공간 속의 compact 곡면은 반드시 가우스 곡률이 양인 점을 가진다.(외접하는 구면과 만나는 점이 바로 그런 점이다.) 또 주어진 곡면이 구면과 위상동형이 아니므로 Euler 특성수는 영이하이다. 한편 Gauss-Bonnet 정리에 의하여 가우스 곡률의 적분값이 Euler 특성수의 2π 배임을 안다. 이 정도면 원하는 결론을 얻을 수 있다. 다른 답안으로는 가우스 곡률이 영이 되지 않는다면 가우스 사상이 주어진 곡면과 구면 사이의 위상동형을 유도한다는 것을 보여도 된다.

---

6. Prove that the tangent bundle TM of a differentiable manifold M is a differentiable manifold which is diffeomorphic, by a fibre preserving diffeomorphism, to the product manifold $M \times \mathbb{R}^n$ iff there exit vector fields $X_1, \cdots, X_n \in \mathfrak{X}(M)$ such that $\{X_i(p)\}$ is a basis of T_pM for each $p \in M$. (5 pts)

. . . .

정답률 1%. 다시 출제된다면, 좀 더 나은 답안이 있겠지.

. . . .

오늘의 명언: **아름다운 답안이 좋은 점수를 얻는다!**
