

7. 원기둥 좌표계

$$(x, y, z) = G(r, \theta, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$$

에서

$$\mathbf{e}_r := \frac{\partial G}{\partial r} \Big/ \left| \frac{\partial G}{\partial r} \right|, \quad \mathbf{e}_\theta := \frac{\partial G}{\partial \theta} \Big/ \left| \frac{\partial G}{\partial \theta} \right|, \quad \mathbf{e}_z := \frac{\partial G}{\partial z} \Big/ \left| \frac{\partial G}{\partial z} \right|$$

라고 두자. 이때 임의의 일급함수 $f(x, y, z)$ 에 대하여

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

임을 보이라.

8. 구면좌표계

$$(x, y, z) = G(\rho, \varphi, \theta) = (\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi)$$

에서

$$\mathbf{e}_\rho := \frac{\partial G}{\partial \rho} \Big/ \left| \frac{\partial G}{\partial \rho} \right|, \quad \mathbf{e}_\varphi := \frac{\partial G}{\partial \varphi} \Big/ \left| \frac{\partial G}{\partial \varphi} \right|, \quad \mathbf{e}_\theta := \frac{\partial G}{\partial \theta} \Big/ \left| \frac{\partial G}{\partial \theta} \right|$$

라고 두자. 이때 임의의 일급함수 $f(x, y, z)$ 에 대하여

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{\rho \sin \varphi} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta$$

임을 보이라.

9. 좌표공간의 한 닫힌 집합 A 에서 정의된 연속함수 $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ 가

$$\lim_{P \rightarrow \infty} f(P) = \infty$$

을 만족시키면, f 는 최소값을 가짐을 보이라.⁶⁴

10. 좌표공간의 표준좌표계 (x, y, z) 에서 얻은 벡터장 $(\partial_x, \partial_y, \partial_z)$ 와 구면좌표계 (ρ, φ, θ) 에서 얻은 벡터장 $(\partial_\rho, \partial_\varphi, \partial_\theta)$ 에 대하여 다음을 보이라. [참고 (5.0.3)]

$$\begin{aligned} \partial_x &= \sin \varphi \cos \theta \partial_\rho + \frac{\cos \varphi \cos \theta}{\rho} \partial_\varphi - \frac{\sin \theta}{\rho \sin \varphi} \partial_\theta \\ \partial_y &= \sin \varphi \sin \theta \partial_\rho + \frac{\cos \varphi \sin \theta}{\rho} \partial_\varphi + \frac{\cos \theta}{\rho \sin \varphi} \partial_\theta \\ \partial_z &= \cos \varphi \partial_\rho - \frac{\sin \varphi}{\rho} \partial_\varphi \end{aligned}$$

⁶⁴“ $P \rightarrow \infty$ ”는 “ $|P| \rightarrow \infty$ ”라는 뜻이다.