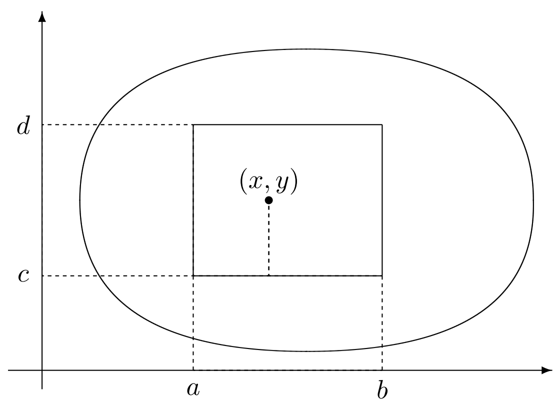
오일러는 1734 년 유체역학을 연구하던 중 다음 사실을 발견하였다.

정리 2.0.2 (편미분 교환법칙) *n-공간의 열린집합에서 정의된 이급함수 f 는 정의역의 임의의 점 P 에 대하여*

$$D_iD_jf(P) = D_jD_if(P) \qquad (1 \le i, j \le n)$$

를 만족시킨다.[8]

증명. 우리가 조사하는 것은 i 번째 변수와 j 번째 변수 사이의 관계이므로 이변수함수 $f(x, y)$ 에 대하여 보이면 된다.



우선 정의역에 포함되는 조그만 직사각형 $[a, b] \times [c, d]$ 속에서

$$\begin{aligned}\int_c^y D_1D_2f(x,t)\,dt &= \frac{\partial}{\partial x}\int_c^y D_2f(x,t)\,dt \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\big(f(x,y) - f(x,c)\big) \\ &= D_1f(x,y) - D_1f(x,c)\end{aligned}$$

를 얻는다. 한편 이 식의 왼쪽항이 y 에 대하여 미분가능하고 따라서 오른쪽항도 y 에 대하여 미분가능하며, 이로부터 양변을 y 로 미분하면

$$D_1D_2f(x,y) = D_2D_1f(x,y)$$

[8] 이 정리는 "두번 미분가능한 함수"에 대하여도 성립한다 [J. Dieudonné, *Éléments d'Analyse* (*Treatise on Analysis*) Vol. I, Theorem 8.12.3]. 오일러의 "편미분 교환법칙"에서 라이프니츠의 "적분기호 속의 미분법"을 유도할 수도 있다.