따름정리 3.1.5 *정리* (3.0.3) *에서* f *가* $k+1$ *급 함수라고 하자. 이때*

$$\begin{aligned} M_{k+1} &:= M_{k+1}f(P,\mathbf{v}) \\ &:= \max\{|D_{i_0}\cdots D_{i_k}f(P+t\mathbf{v})| : 1 \le i_0,\ldots,i_k \le n,\ 0 \le t \le 1\} \end{aligned}$$

로 두면

$$|D_{\mathbf{v}}{}^{k+1}f(P+t^*\mathbf{v})| \le M_{k+1}(|v_1|+\cdots+|v_n|)^{k+1}$$

이고 따라서 다음 부등식을 얻는다:

$$|R_kf(P,\mathbf{v})| \le M_{k+1}\frac{(|v_1|+\cdots+|v_n|)^{k+1}}{(k+1)!}.$$

위 정리의 마지막 식에서

$$\lim_{\mathbf{v}\to\mathbf{0}}\frac{(|v_1|+\cdots+|v_n|)^{k+1}}{|\mathbf{v}|^k}=0$$

이므로 다음 정리를 얻는다.

따름정리 3.1.6 *점* P *에서* $k+1$ *급 함수* f *의* k *차 잉여함수*

$$\mathbf{v}\mapsto R_kf(P,\mathbf{v})$$

는 $o(|\mathbf{v}|^k)$ *이다.*[22]

3.1.7 보기

함수

$$f(x,y)=e^x\sin y$$

에서

$$D_1f=e^x\sin y,\quad D_2f=e^x\cos y$$

[22] n-공간의 원점 근방에서 정의된 함수 $g(\mathbf{v})$ 가 $g(\mathbf{0})=0$ 이고 $\lim_{\mathbf{v}\to\mathbf{0}}\frac{|g(\mathbf{v})|}{|\mathbf{v}|^k}=0$ 이면 $g(\mathbf{v})$ 를 $o(|\mathbf{v}|^k)$ 라고 말한다. 위 정리는 f 가 $k+1$ 번 미분가능 할 때뿐 아니라 k 번 미분가능할 때에도 성립한다.